



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE GRADO

Título
Matemáticas y relojes de sol
Autor/es
Bruno Flores Barrio
Director/es
Víctor Lanchares Barrasa
Facultad
Facultad de Ciencia y Tecnología
Titulación
Grado en Matemáticas
Departamento
Curso Académico
2015-2016



Matemáticas y relojes de sol, trabajo fin de grado de Bruno Flores Barrio, dirigido por Víctor Lanchares Barrasa (publicado por la Universidad de La Rioja), se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported. Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Matemáticas y relojes de sol

Alumno:

Bruno Flores Barrio

Tutores:

Víctor Lanchares Barrasa

Logroño, julio, 2016

Resumen

El objetivo de esta memoria es el estudio de un problema matemático de índole práctico: la medición del tiempo. Esto da lugar a dos aspectos: por un lado la construcción de un reloj basado en la rotación terrestre y por otro las correcciones horarias.

Para resolver estos dos problemas se deben considerar las nociones básicas del movimiento de los planetas, así como los sistemas de referencia astronómicos y terrestres para dar la posición del Sol y del observador, lo que se hace en el primer capítulo, junto con la descripción de cómo construir los relojes de sol más habituales: ecuatoriales, verticales y horizontales.

En el segundo capítulo se aborda la construcción de un reloj de sol con cuadrante plano, mediante el uso de matrices de rotación y nociones básicas de álgebra lineal, generalizando las construcciones más habituales.

Por último, se introducen las correcciones horarias necesarias para transformar la hora dada por el reloj de sol a la *hora civil*. Se explica por qué estas dos horas no coinciden y se estudian los fenómenos principales que causan esta diferencia, dando la corrección en forma de desarrollos en serie de potencias.

Summary

The goal of this report is the study of a practical mathematical problem: the measurement of time. This brings two problems: the construction of a sundial based on Earth's rotation, and the corrections needed.

In addressing these issues it is necessary to consider the basic notions of planetary motion, as well as astronomical and terrestrial reference frames, which is done in the first chapter. In this chapter there is also a description of the process of building the most common sundials: equatorial, vertical and horizontal.

In the second chapter, a more general view of the construction of a sundial is given, by using rotation matrices and linear algebra.

Lastly, it explains the corrections needed to transform the time given by a sundial to the corresponding *civil time* are considered. It is explained why these two times are not the same and the main reasons of this difference are taken into account. Finally, a power series expansion is obtained for the practical calculation of this difference.

Índice general

1. Fundamentos	1
1.1. Introducción	1
1.2. El movimiento de los planetas	2
1.3. Sistemas de referencia	3
1.4. Relojes ecuatoriales	8
1.5. Relojes horizontales	10
1.6. Relojes verticales	12
1.6.1. Reloj vertical orientado	12
1.6.2. Reloj vertical general	13
2. Relojes de sol generales	17
2.1. El vector de posición del Sol	17
2.2. Cuadrante horizontal	19
2.3. Cuadrante general	20
3. Correcciones horarias	25
3.1. Introducción. Tiempo solar y tiempo sidéreo.	25
3.2. Ecuación del tiempo	26
3.2.1. Primera causa (C1): la oblicuidad de la eclíptica.	27
3.2.2. Segunda causa (C2): la excentricidad de la órbita de la Tierra.	31
3.3. Cálculo de la ecuación del tiempo	35
3.4. La ecuación del tiempo y las funciones de Bessel	42
Conclusiones	45
Bibliografía	47

Capítulo 1

Fundamentos de los relojes de sol

1.1. Introducción

La medición del tiempo ha sido de gran interés para el hombre desde su aparición sobre la Tierra, debido a la vital importancia que tiene para la planificación de tareas (épocas de caza, recolección, etc). Para ello se han creado distintos objetos que reciben el nombre de relojes.

Un reloj está basado en un fenómeno observable o detectable que se repite de forma periódica, lo que nos permite medir intervalos de tiempo iguales. Sin embargo, esta premisa, sencilla, no deja de tener ciertas complicaciones desde un punto de vista funcional. En este sentido, debemos asegurarnos de que nuestro reloj está fundamentado en un movimiento periódico dotado de estabilidad en dos sentidos: cada oscilación (periodo) debe ser igual a las demás y éstas no deben detenerse en ningún momento. Bajo estas premisas, podemos construir un reloj natural basado en la rotación de la Tierra alrededor de su eje, que será la base para la construcción de otros más complejos. Debido a la rotación, el Sol parece dar una vuelta alrededor de la Tierra cada día, de manera que tenemos un fenómeno cíclico que se repite con periodicidad de 1 día, que es el paso consecutivo del Sol por el meridiano del lugar. Este periodo puede subdividirse, además, en intervalos más pequeños: horas, minutos y segundos.

Para llevar a la práctica un reloj basado en la rotación terrestre, usaremos el movimiento de la sombra arrojada por un objeto, ya que este movimiento es consecuencia del movimiento de rotación. Así, un reloj de sol constará de dos elementos fundamentales: una varilla a la que llamaremos gnomon y un cuadrante, superficie sobre la que se proyectará la sombra del gnomon y en el que estarán dibujadas las líneas que indiquen la distintas horas cuando la sombra del gnomon se proyecte sobre ellas.

Pero antes de esto veamos unos conceptos que nos serán de utilidad para comprender lo que viene después. Estos conceptos están relacionados con la determinación

cación de la posición del Sol en el cielo a lo largo del día y del año.

1.2. El movimiento de los planetas

En primer lugar, debemos comprender cómo se mueve la Tierra alrededor del Sol para saber cómo cambia a lo largo del año la configuración de ambos astros. Este movimiento viene descrito por la ley de gravitación universal.

La ley de gravitación universal de Newton describe la interacción gravitatoria entre distintos cuerpos con masa. Según esta ley, la fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , separados una distancia r , es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, es decir:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

siendo F el módulo de la fuerza ejercida entre ambos cuerpos (su dirección se encuentra en la recta que une ambos cuerpos) y G la constante de gravitación universal.

A partir de esta ley se pueden deducir las leyes de Kepler, las cuales describen el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol.

1. Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.
2. Los planetas se mueven con velocidad areolar constante. Es decir, el radio vector que une el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales, por lo que el movimiento no es uniforme.
3. El cuadrado del periodo orbital es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita: $T^2 = Kr^3$.

Estas leyes explican el movimiento de la Tierra alrededor del Sol (traslación) en el denominado plano de la eclíptica, y cuyo periodo determina el año. Aparte del movimiento de la Tierra alrededor del Sol, ésta también gira sobre sí misma alrededor de un eje imaginario denominado eje terrestre, dando lugar a un movimiento cíclico más corto, el día. El eje está inclinado con respecto a la normal del plano de la eclíptica y esta inclinación va cambiando muy lentamente, siendo en la actualidad $23^\circ 26' 14''$ ¹ (Fig. 1.1).



Figura 1.1: Oblicuidad de la eclíptica

¹Nota: los ángulos de este capítulo vendrán siempre expresados en grados.

A causa de la inclinación del eje la densidad de rayos de luz que llegan a una cierta latitud cambia a lo largo del año, causando así las estaciones.

Debido a los movimientos anteriores la posición aparente del Sol en el cielo va cambiando y para seguir su curso es necesario introducir sistemas de referencia adecuados para determinar su posición.

1.3. Sistemas de referencia

En lo sucesivo usaremos habitualmente las nociones de meridiano, que se define como un semicírculo máximo del globo terrestre que pasa por los polos norte y sur; ecuador, o plano perpendicular al eje de rotación equidistante de los polos norte y sur; y los ángulos de longitud y latitud que nos dan las coordenadas de un lugar sobre la superficie terrestre (Fig. 1.2).

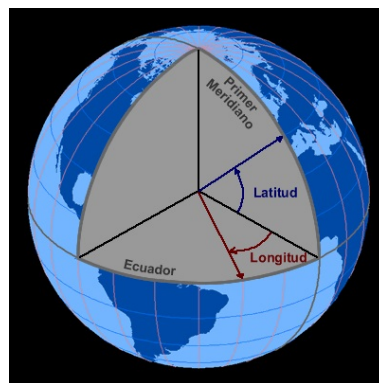


Figura 1.2: Latitud y longitud

Para definir las coordenadas de un objeto celeste construiremos una esfera imaginaria, de la que somos el centro, sobre cuya superficie se proyectan los astros y a la que llamaremos *esfera celeste*. Veamos tres sistemas de referencia ortogonales² para posicionar los astros sobre la *esfera celeste*.

El primero de los sistemas de referencia es el denominado **horizontal** y toma como eje x la dirección este-oeste, siendo positivo en sentido oeste; el eje y en sentido sur y el eje z perpendicular al plano horizontal y en sentido de la vertical. El punto en el que el eje z corta a la esfera celeste en sentido positivo se denomina *zenit* y el opuesto *nadir*. Una vez que hemos construido este sistema de referencia, podemos dar las coordenadas de cualquier astro directamente, (x, y, z) , o sustituirlas por dos ángulos, altura (h) y azimut (A). La altura es el ángulo que forma la visual del objeto con el plano horizontal y el azimut el ángulo que forma la proyección sobre el plano horizontal con el eje y (medido en sentido antihorario). Ver Figura 1.3.

²Todos los sistemas de referencia que se verán serán ortogonales y cumplirán la *regla de la mano derecha* (dextrógiros).

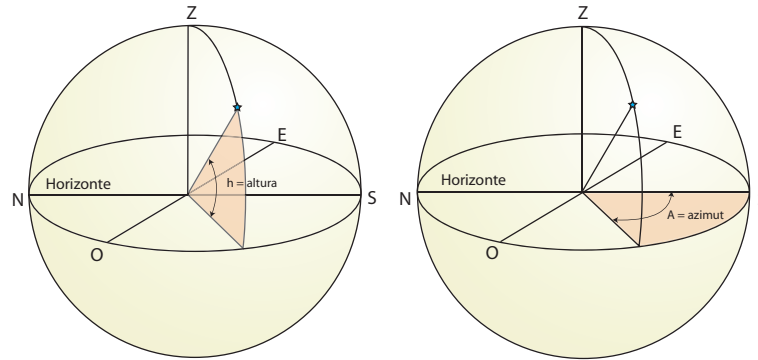


Figura 1.3: Sistema de referencia horizontal.

El problema del sistema de coordenadas horizontales es que los ángulos h y A varían constantemente debido al movimiento de rotación de la Tierra. Tiene sentido, por lo tanto, tomar otro sistema de referencia en el que uno de los ejes coincida con el eje de rotación de la Tierra. El segundo sistema de referencia que vamos a ver cumple precisamente esto.

Este sistema de referencia se denomina **ecuatorial** y en él, el eje z es paralelo al eje de rotación con sentido positivo hacia el norte. Los otros dos ejes se encuentran en el plano ecuatorial, plano paralelo al ecuador terrestre que pasa por el lugar del observador y que está inclinado $90 - \phi$ grados respecto al plano horizontal, siendo ϕ la latitud del observador o del lugar. El eje x coincide con el eje x del sistema de coordenadas horizontal (i.e. la recta de intersección de los planos ecuatorial y horizontal) y el eje y coincide con la proyección de la dirección norte-sur sobre el plano ecuatorial, con sentido positivo hacia al sur, como se puede observar en la Figura 1.4.

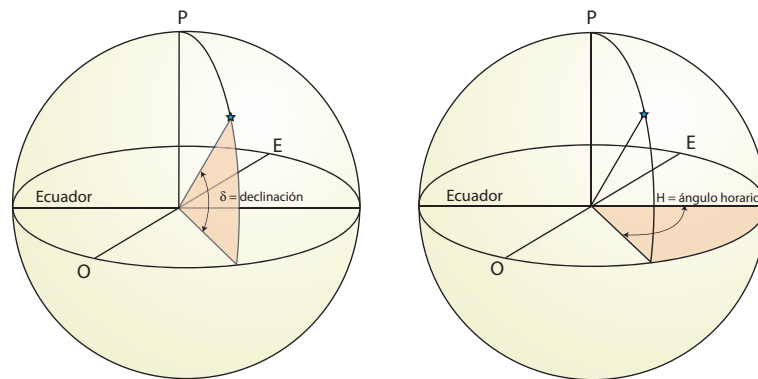


Figura 1.4: Sistema de referencia ecuatorial

En este sistema los ángulos que nos dan las coordenadas de un punto son la declinación (δ), que mide el ángulo que forma la visual con el plano ecuatorial, y

el ángulo horario (H), que es el ángulo formado por el meridiando que pasa por el zenit y el que pasa por el astro, o lo que es lo mismo, el ángulo que forma la ortogonal de la visual del astro sobre el plano ecuatorial con el eje y . Este sistema tiene la enorme ventaja de que la declinación de un astro permanece *constante* a lo largo del día mientras que el ángulo horario, medido en horas, minutos y segundos, varía de 0 a 24 horas en un día, indicando el ángulo que ha girado el astro desde que pasara por el meridiando del lugar³.

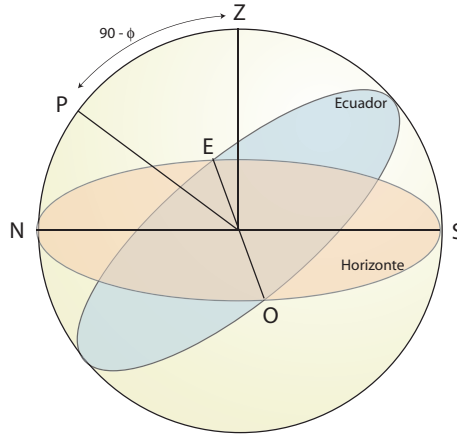


Figura 1.5: Relación entre los sistemas horizontal y ecuatorial

Si nos fijamos en la Figura 1.5 vemos que para pasar de un sistema de coordenadas a otro, es preciso hacer una rotación de eje x y ángulo $90 - \phi$. De esta forma se tiene que si (x_h, y_h, z_h) son las coordenadas del astro en horizontales

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos h \operatorname{sen} A \\ \cos h \operatorname{cos} A \\ \operatorname{sen} h \end{pmatrix}$$

y (x_e, y_e, z_e) en ecuatoriales

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cos} \delta \operatorname{sen} H \\ \operatorname{cos} \delta \operatorname{cos} H \\ \operatorname{sen} \delta \end{pmatrix}$$

entonces, multiplicando por la matriz de rotación de eje x y ángulo $90 - \phi$

$$\begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{cos}(90 - \phi) & -\operatorname{sen}(90 - \phi) \\ 0 & \operatorname{sen}(90 - \phi) & \operatorname{cos}(90 - \phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{cases} \operatorname{cos} \delta \operatorname{sen} H = \operatorname{cos} h \operatorname{sen} A, \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{cos} \delta \operatorname{cos} H - \operatorname{cos} \phi \operatorname{sen} \delta = \operatorname{cos} h \operatorname{cos} A, \\ \operatorname{cos} \phi \operatorname{cos} \delta \operatorname{cos} H + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} h. \end{cases} \quad (1.1)$$

³ Círculo máximo que pasa por el zenit y el polo celeste

Observar que la transformación depende de la posición del observador sobre la Tierra, en concreto de la latitud (ϕ).

De aquí podemos deducir el punto de salida y puesta del Sol, y la cantidad de horas de sol que habrá un día determinado del año.

Estas ecuaciones no solo nos permiten relacionar ambos sistemas de referencia, sino que además nos permiten deducir algunos aspectos interesantes a la hora de construir un reloj de sol. En concreto, podemos obtener el azimut del punto de salida del Sol así como la duración del día.

A lo largo del año la declinación del Sol (δ) varía entre $-23,4^\circ$ y $23,4^\circ$, lo que hace que tanto el punto de salida como la duración del día varíen ⁴. Al amanecer y al anochecer se cumple que $h = 0$, el Sol está sobre el horizonte, y los ángulos $\pm A$ y H nos indican los puntos de salida/puesta del Sol y la mitad de horas de luz respectivamente.

Sustituyendo h por 0 en (1.1) resulta

$$\begin{cases} \cos \delta \sin H = \sin A, \\ \cos A = -\sin \phi \sin \delta \tan \phi - \cos \phi \sin \delta, \\ \cos H = -\tan \phi \tan \delta. \end{cases} \quad (1.2)$$

Notar que, durante los equinoccios, $\delta = 0$ y de la primera ecuación de (1.2) resulta que $A = H$ y de la tercera ecuación de (1.2) que $H = 6$ ($\cong 90^\circ$), es decir, hay $2H = 12$ horas de luz y el Sol sale por el este y se pone por el oeste.

Consideremos el caso general y fijémonos en la tercera ecuación de (1.2),

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta.$$

Como $-1 \leq \cos H \leq 1$,

$$|-\tan \phi \tan \delta| \leq 1.$$

Puesto que la declinación del Sol hemos dicho que varía entre $-23,4^\circ$ y $+23,4^\circ$ (oblicuidad de la eclíptica) resulta que cuando la latitud ϕ cumple

$$|\phi| > 90^\circ - 23,4^\circ = 66,6^\circ,$$

ya sea norte o sur, nos queda $\cos H > 1$, lo que significa que el Sol permanece durante todo el día por encima o por debajo del horizonte. Las latitudes que cumplen esto son las que pertenecen a los círculos polares.

Lo dicho anteriormente puede verse gráficamente, teniendo en cuenta que los tres planos: horizonte, ecuador y eclíptica se cortan en la dirección este-oeste del lugar. Proyectando la esfera celeste desde esa dirección obtenemos el esquema de la Figura 1.6, que nos será útil más adelante para calcular las horas de luz para un día cualquiera.

Veamos por último las coordenadas **ecuatoriales absolutas**, las cuales son independientes del lugar de observación y del movimiento de rotación. En este sistema

⁴Aunque se puede considerar constante a lo largo de un día para ciertos cálculos.

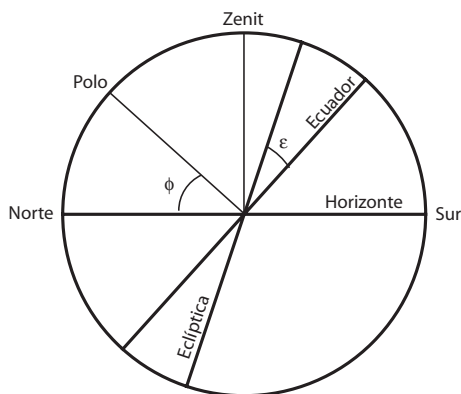


Figura 1.6: Proyección de los sistemas horizontal y equatorial sobre el plano $x = 0$

se toma como origen de coordenadas el centro de la Tierra, como eje x la línea intersección de los planos ecuatorial y de la eclíptica, con sentido positivo en la dirección del punto vernal (γ)⁵; como eje z la línea que une los polos con sentido positivo hacia el Polo Norte y el eje y de manera que se tenga un sistema dextrógiro ($\vec{y} = \vec{z} \times \vec{x}$).

Las coordenadas ecuatoriales absolutas de un astro en la *esfera celeste* son la ascension recta $\alpha \in [0, 2\pi)$, ángulo que forma la proyección de la visual del astro sobre el plano ecuatorial con x , y la declinación $\delta \in [-\pi/2, \pi/2]$ (ver Figura 1.7).

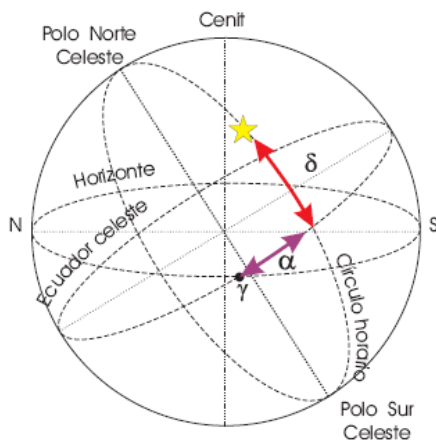


Figura 1.7: Coordenadas ecuatoriales absolutas

⁵Punto de la eclíptica a partir del cual el Sol pasa, en su movimiento aparente sobre la *esfera celeste*, del hemisferio sur celeste al hemisferio norte, lo que ocurre en el equinoccio de primavera, iniciándose la primavera en el hemisferio norte y el otoño en el hemisferio sur.

1.4. Relojes ecuatoriales

De los distintos tipos de relojes de sol, el más elemental es el denominado reloj ecuatorial. Para su construcción nos apoyaremos en [8]. La idea que subyace en este tipo de reloj es muy simple y se basa en el hecho de que la sombra del gnomon describirá ángulos iguales en tiempos iguales, siempre que la orientación de la varilla y el plano de proyección sean los adecuados. De este modo, el plano de proyección, o cuadrante, debe de ser paralelo al ecuador terrestre, de ahí su nombre, con el gnomon perpendicular a la superficie del mismo, de modo que quede orientado en la dirección del eje de rotación de la Tierra. De la base del gnomon se dibujan sobre el cuadrante las líneas horarias de forma radial y separadas 15° entre sí.

Los relojes de tipo ecuatorial presentan varios problemas. Uno de ellos es debido a que el eje de rotación de la Tierra está inclinado 23° con respecto a la normal del plano de su órbita (Fig. 1.1). Por ese motivo, las dos caras del cuadrante deben de estar marcadas, ya que la sombra del gnomon se proyectará en la cara superior en verano y en la inferior en invierno. Esto es así porque las trayectorias que describe el Sol son paralelas al ecuador y unas veces se encuentran por encima del mismo (entre el 21 de marzo y el 22 de septiembre) y otras por debajo del ecuador (entre el 22 de septiembre y el 21 de marzo), como se puede ver en las Figuras 1.1 y 1.9. Justo en los equinoccios (21 de marzo y 22 de septiembre) el Sol se mueve exactamente sobre el plano ecuatorial y no habría ninguna sombra sobre el cuadrante, por lo que este reloj no marcaría la hora.

Para evitar este problema, se sustituye el cuadrante por un anillo incompleto que vendría a ser el borde del disco que forma el cuadrante. Este tipo de relojes se denominan armilares, Figura 1.8, y plantean una cuestión interesante. Dado que un reloj de sol solo marca la hora cuando éste se encuentra por encima del horizonte, ¿cuáles son las horas extremas que marcará a lo largo del año?, ¿cuántas líneas horarias son necesarias en un reloj de sol?



Figura 1.8: reloj ecuatorial armilar

Para responder a esta pregunta podemos usar el sistema de ecuaciones (1.1) o bien apoyarnos en la Figura 1.6. Utilicemos esta última.

Fijada la posición del Sol sobre la eclíptica un día dado del año, la trayectoria del Sol a lo largo del día describirá un segmento paralelo al ecuador (Fig. 1.9). El Sol alcanza su altura máxima en M , su mínima en Q y, por simetría, sale y se pone en el punto N .

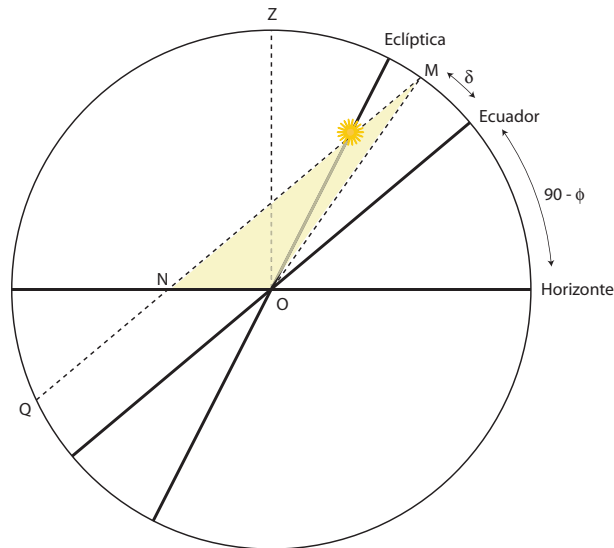


Figura 1.9: Determinación del número de horas de Sol para un día

Con esto procedemos a calcular la duración del día y el punto de salida del Sol. Consideramos la trayectoria del Sol a lo largo del día dada por el segmento \overline{MQ} . Suponiendo la circunferencia de radio $\overline{OM} = 1$, tenemos que (Fig. 1.9)

$$\overline{MQ} = 2 \cos \delta$$

y aplicando el teorema del seno al triángulo $\triangle NOM$, se tiene

$$\begin{aligned} \overline{NM} &= \frac{\text{sen}(90 + \phi - \delta)}{\text{sen}(90 - \phi)} = \frac{\cos(\phi - \delta)}{\cos \phi}, \\ \overline{NO} &= \frac{\text{sen} \delta}{\text{sen}(90 - \phi)} = \frac{\text{sen} \delta}{\cos \phi}. \end{aligned}$$

La trayectoria del Sol por la *esfera celeste*, segmento \overline{MQ} en el esquema anterior, es una circunferencia de diámetro $2 \cos \delta$, como se puede ver mejor en la proyección siguiente, Figura 1.10.

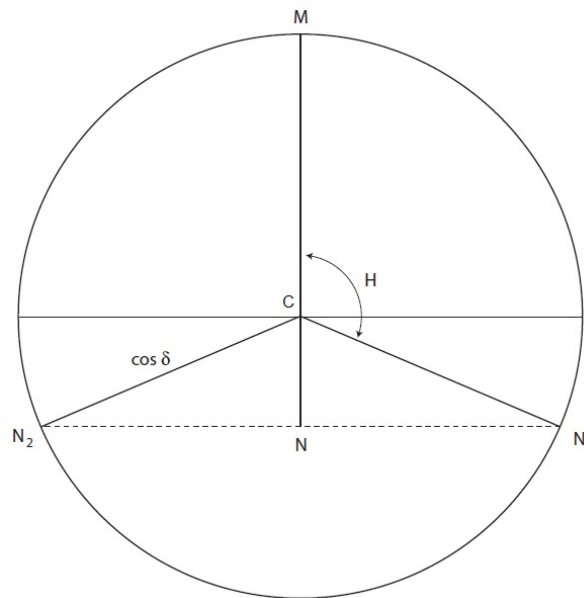


Figura 1.10: Vista cenital (Vista desde el polo)

La duración del día viene dada, por lo tanto, por el ángulo entre los puntos N_1 y N_2 , ángulo $2H$. Ahora bien, tenemos que

$$\overline{NC} = \overline{NM} - \overline{CM} = \frac{\cos(\phi - \delta)}{\cos \phi} - \cos \delta = \tan \phi \operatorname{sen} \delta.$$

Fijámonos en el triángulo rectángulo $\triangle NCN_2$

$$\cos H = -\tan \phi \tan \delta, \quad (1.3)$$

ecuación ya obtenida en la sección 1.3. Para una latitud como la de Logroño, $42^\circ 27' 56''$, tenemos

$$H = \arccos(-\tan(42^\circ 27' 56'') \tan \delta) \quad \text{con } \delta \in [-23,4^\circ, 23,4^\circ],$$

y entonces

$$66,67^\circ \leq H \leq 113,33^\circ, \quad 4,45 \text{ h} \leq H \leq 7,56 \text{ h}.$$

Es decir, el día más corto dura aproximadamente 9 horas y el más largo 15 horas y media. Luego con poner 8 líneas horarias antes de la del mediodía, y 8 después, nos bastaría.

1.5. Relojes horizontales

Los relojes de Sol ecuatoriales tienen el problema de que el plano de proyección no es intuitivo en el sentido de que no lo podemos vislumbrar de forma natural, ni es

habitual en nuestro entorno. Por ello se utilizan otro tipo de planos de proyección, como los planos horizontales y verticales, que dan lugar a los relojes horizontales y verticales respectivamente.

El cuadrante de los relojes horizontales es paralelo al plano del horizonte, mientras el gnomon sigue siendo paralelo al eje de rotación de la Tierra. En este caso, al no ser el cuadrante perpendicular al gnomon, las líneas horarias no están igualmente espaciadas. Su cálculo puede hacerse de manera sencilla por proyección del cuadrante ecuatorial sobre el horizontal (Figura 1.11).

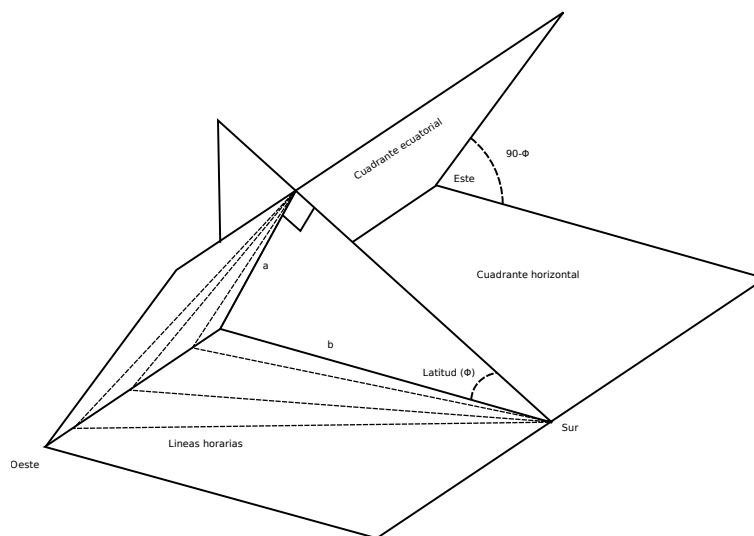


Figura 1.11: Construcción de un reloj horizontal

La relación entre las longitudes a y b es

$$\frac{b}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{a}{\text{sen } \phi} \Rightarrow \frac{a}{b} = \text{sen } \phi.$$

La proyección de la sombra sobre el plano horizontal para cada línea horaria del reloj ecuatorial nos da su equivalente en el horizontal. Abatiendo sobre el plano horizontal la figura anterior obtenemos la Figura 1.12.

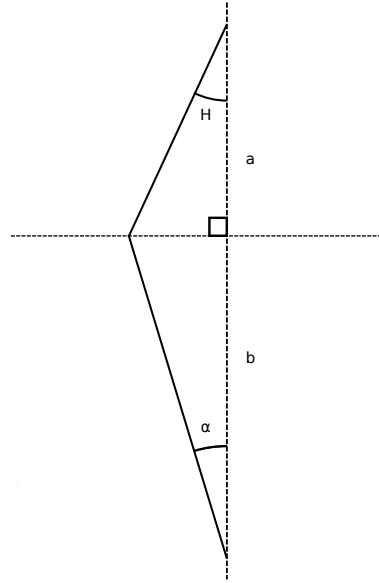


Figura 1.12: Líneas horarias del reloj horizontal

De aquí se deduce que

$$a \tan H = b \tan \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{a}{b} \tan H = \sin \phi \tan H,$$

y nos queda

$$\alpha = \arctan(\sin \phi \tan H). \quad (1.4)$$

El ángulo α representa el ángulo de la línea horaria H (y $-H$ por simetría) en el plano horizontal. Recordar que los ángulos horarios H vienen dados de 15° en 15° siendo $H = 0$ el mediodía (que coincide con la dirección Norte-Sur).

1.6. Relojes verticales

Al reloj de sol con el cuadrante situado en un plano vertical, es decir perpendicular al plano del horizonte, se le denomina reloj vertical. El reloj de sol vertical es el más fácil de encontrar ya que se encuentra en multitud de torres de iglesias y fachadas de casas antiguas. Distinguiremos dos tipos: el reloj vertical orientado hacia el sur y el reloj vertical con una orientación cualquiera (*muro declinante*). Veamos primero el orientado.

1.6.1. Reloj vertical orientado

El cuadrante del reloj está contenido en el plano Este-Oeste y el gnomon en el Sur-Norte (ver Figura 1.13).

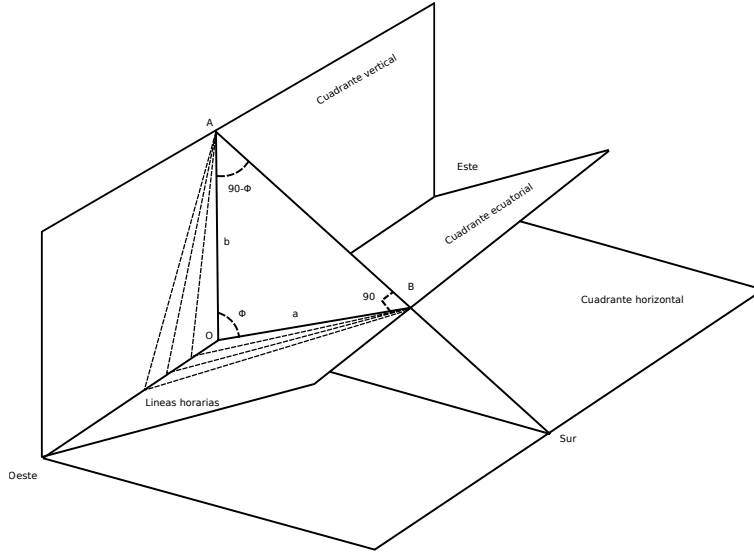


Figura 1.13: Construcción de un reloj vertical

Fijándonos en el triángulo rectángulo $\triangle OAB$ tenemos que la relación entre a y b es

$$\frac{a}{\text{sen}(90 - \phi)} = \frac{b}{\text{sen}90} = b,$$

$$\frac{a}{b} = \text{sen}(90 - \phi) = \cos \phi,$$

Igual que con los relojes horizontales abatimos los dos cuadrantes sobre el plano horizontal para ver mejor la relación entre los ángulos de las líneas horarias de cada uno, Figura 1.14.

Fijémonos en un ángulo horario en concreto, H , entonces al igual que con los horizontales, se cumple

$$a \tan H = b \tan \beta$$

y teniendo en cuenta que $\frac{a}{b} = \cos \phi$

$$\tan \beta = \tan H \cos \phi \implies \beta = \arctan(\tan H \cos \phi).$$

El ángulo β representa el ángulo de la línea horaria H en el cuadrante vertical orientado.

1.6.2. Reloj vertical general

Veamos ahora cómo quedarían los ángulos horarios para un cuadrante vertical con orientación cualquiera. Para esto nos ayudaremos de un cuadrante horizontal

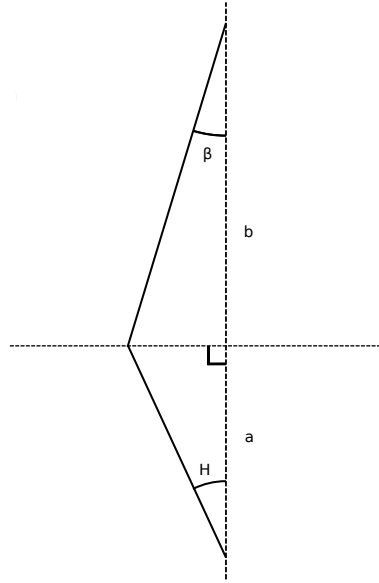


Figura 1.14: Líneas horarias del reloj vertical

auxiliar. Llamamos θ a la declinación del plano de la pared, ángulo que forma con el Este-Oeste, en nuestro dibujo $\theta = -\theta'$ (es más sencillo de ver así). Abatiendo sobre el plano horizontal y fijándonos en un ángulo horario concreto α del cuadrante horizontal, nos queda la Figura 1.15
Sabemos que

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \operatorname{sen} \phi \tan H, \\ \frac{c}{b} &= \tan \phi,\end{aligned}\tag{1.5}$$

y, fijándonos en el triángulo $\triangle ABC$ y aplicando el teorema de los senos, tenemos que

$$\frac{x}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \psi} = \frac{b}{\cos(\alpha + \theta')}.\tag{1.6}$$

Aplicando que $x = c \tan \gamma$, y teniendo en cuenta (1.5), resulta

$$\begin{aligned}\frac{c \tan \gamma}{\operatorname{sen} \alpha} &= \frac{b}{\cos(\alpha + \theta')} \Rightarrow \tan \gamma = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \phi \cos(\alpha + \theta')} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}}{\tan \phi \left(\frac{\cos \alpha \cos \theta'}{\cos \alpha} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta'}{\cos \alpha} \right)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \phi \tan H}{\tan \phi (\cos \theta' - \tan \alpha \operatorname{sen} \theta')} \\ &= \frac{\cos \phi \tan H}{\cos \theta' - \operatorname{sen} \phi \tan H \operatorname{sen} \theta'}.\end{aligned}$$

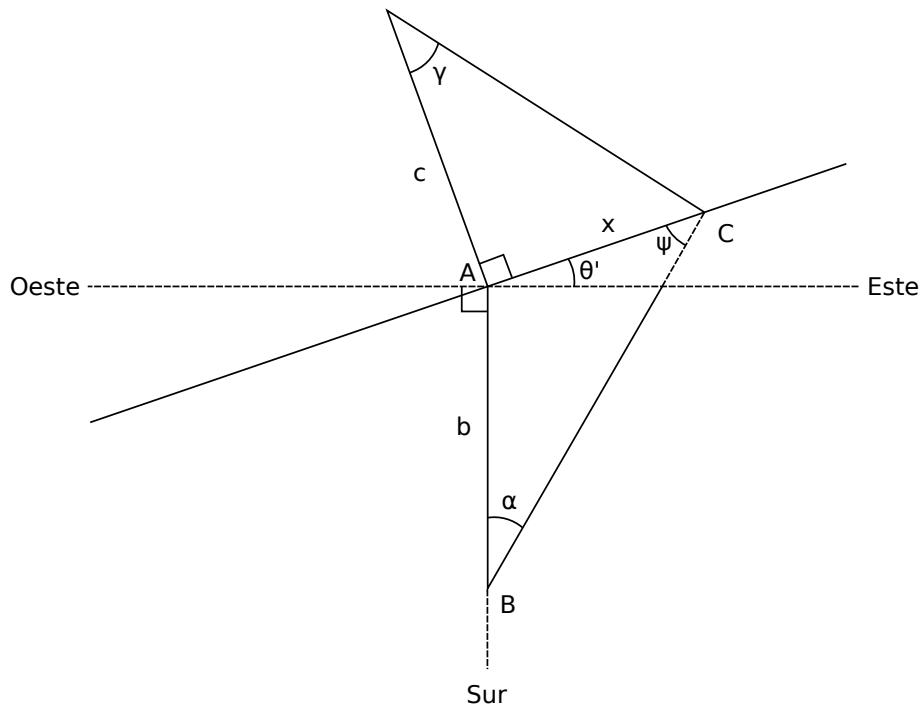


Figura 1.15: Construcción reloj vertical general

Reemplazando ahora el cambio $\theta = -\theta'$

$$\tan \gamma = \frac{\cos \phi \tan H}{\cos \theta + \sin \theta \sin \phi \tan H'}$$

que nos da la ecuación de las líneas horarias γ de un reloj vertical con orientación. Nótese que si $\theta = 0$, entonces se tienen las ecuaciones de las líneas horarias de un reloj vertical orientado.

Capítulo 2

Reloj de sol generales

Hasta ahora hemos visto cómo construir relojes de sol cuyo cuadrante sea horizontal o vertical respecto al suelo, o contenido en el plano ecuatorial. En esta sección vamos a ver cómo se construye un reloj de sol en cualquier superficie plana expuesta a la luz del Sol y con el gnomon no necesariamente orientado al polo. Para ello seguiremos principalmente las ideas dadas en [7]. Pero primero necesitamos algunas nociones elementales que veremos a continuación.

2.1. El vector de posición del Sol

En la sección 1.3 ya hemos hablado de los sistemas de referencia ecuatoriales y horizontal. Consideramos ahora el sistema de referencia ecuatorial ortogonal con ejes (x_e, y_e, z_e) que tiene como origen el centro de la Tierra, el eje de rotación como z_e , con sentido positivo hacia el polo norte, el plano ecuatorial como plano (x_e, y_e) y el plano del meridiano que pasa por el reloj como plano (y_e, z_e) .

Las coordenadas de un vector \vec{v} que va del origen a un punto (x, y, z) serán por tanto

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = |\vec{v}| \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \cos \omega \\ \text{sen } \theta \text{sen } \omega \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

donde $\theta = \arccos(z/|\vec{v}|)$, con $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ y $\omega = \arctan 2(y/|\vec{v}|, x/|\vec{v}|)$ ¹ con $0 \leq \omega \leq 360^\circ$. θ es el ángulo formado por z_e con \vec{v} y ω el ángulo entre x_e y la proyección de \vec{v} sobre xy . Nótese que las coordenadas de \vec{v} en términos de $(|\vec{v}|, \theta, \omega)$ es la representación polar estándar en un sistema de referencia ortogonal dextrógiro.

Consideramos la Tierra como una esfera de radio r_t y la órbita que describe alrededor del Sol como una circunferencia de radio r_{ts} que, como ya sabemos, es una simplificación. Sea $\vec{s}_e(H, \delta)$ el vector que va del centro de la Tierra al centro del Sol

¹arctan2 es la versión de arctan(x/y) que tiene en cuenta el cuadrante en el que se encuentra el ángulo, $\arctan 2(x, y) = \{\omega \in [0^\circ, 360^\circ] \mid \arcsen \omega = x \wedge \arccos \omega = y\}$

cuando el Sol tiene ángulo horario H y declinación δ . En este caso teniendo en cuenta que $\omega = 270^\circ - H$, $\theta = 90^\circ - \delta$ y que

$$\vec{s}_e(0,0) = r_{ts} \begin{pmatrix} \text{sen } 270^\circ \cos 90^\circ \\ \text{sen } 270^\circ \text{sen } 90^\circ \\ \cos 270^\circ \end{pmatrix} = r_{ts} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{s}_e(0,\delta) = R_x(-\delta)\vec{s}_e(0,0) = r_{ts} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\text{sen } \delta \\ 0 & \text{sen } \delta & \cos \delta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = r_{ts} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \delta \\ \text{sen } \delta \end{pmatrix},$$

tenemos que²

$$\begin{aligned} \vec{s}_e(H,\delta) &= R_z(-H)\vec{s}_e(0,\delta) = r_{ts} \begin{pmatrix} \cos H & -\text{sen } H & 0 \\ \text{sen } H & \cos H & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \delta \\ \text{sen } \delta \end{pmatrix} \\ &= r_{ts} \begin{pmatrix} -\text{sen } H \cos \delta \\ -\cos H \cos \delta \\ \text{sen } \delta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otra parte las coordenadas, en el sistema de referencia dado, de un punto sobre la superficie terrestre de latitud ϕ son

$$\vec{s}_e(\phi, H, \delta) = \vec{s}_e(H, \delta) - r_t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \phi \\ \text{sen } \phi \end{pmatrix}.$$

Consideramos ahora el sistema de referencia horizontal de la sección 1.3. Si trasladamos el sistema de referencia ecuatorial al lugar en el que se encuentra el reloj es fácil observar, como ya se hizo anteriormente, que para pasar de un sistema a otro solo hay que hacer una rotación de $\bar{\phi} = 90^\circ - \phi$ en el sentido de las agujas del reloj en torno al eje x . Por lo tanto las coordenadas del vector que une el reloj con el Sol serán

$$\begin{aligned} \vec{s}_h(\phi, H, \delta) &= R_x(-\bar{\phi})\vec{s}_e(\phi, H, \delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen } \phi & -\cos \phi \\ 0 & \cos \phi & \text{sen } \phi \end{pmatrix}^T \vec{s}_e(\phi, H, \delta) \\ &= r_{ts} \begin{pmatrix} -\text{sen } H \cos \delta \\ -\text{sen } \phi \cos H \cos \delta + \cos \phi \text{sen } \delta \\ \cos \phi \cos H \cos \delta + \text{sen } \phi \text{sen } \delta \end{pmatrix} - r_t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y las de su vector unitario correspondiente

² $R_x(-\delta)$ es la rotación entorno al eje x de δ grados según *la regla de la mano derecha (sentido directo)*, $R_x(-\delta) = R_x(\delta)^T$

$$\begin{aligned}\vec{u}_h(\phi, H, \delta) &= \frac{\vec{s}_h(\phi, H, \delta)}{|\vec{s}_h(\phi, H, \delta)|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} H \cos \delta \\ -\operatorname{sen} \phi \cos H \cos \delta + \cos \phi \operatorname{sen} \delta \\ \cos \phi \cos H \cos \delta + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta \end{pmatrix} - \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

con $a = \frac{r_t}{r_{ts}}$ y, como $r_t \ll r_{ts}$, tenemos que $a \approx 0$ y

$$\vec{u}_h(\phi, H, \delta) \approx \cos \delta \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} H \\ -\operatorname{sen} \phi \cos H + \cos \phi \tan \delta \\ \cos \phi \cos H + \operatorname{sen} \phi \tan \delta \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Cuando el Sol se encuentra por debajo del horizonte la componente z de \vec{u}_h es negativa, y positiva cuando está por encima. Por tanto, el Sol es visible cuando

$$\cos \phi \cos H + \operatorname{sen} \phi \tan \delta \geq 0$$

lo que ocurre cuando el ángulo horario H del Sol cumple

$$\cos H \geq -\tan \phi \tan \delta,$$

como ya habíamos visto.

2.2. Cuadrante horizontal

Sea $\vec{v}_h = (x_n, y_n, z_n)^T$ un vector en el sistema de coordenadas horizontales que va del origen a un punto (x_n, y_n, z_n) , nuestro gnomon. El punto está por tanto a una altura z_n sobre el punto (x_n, y_n) del plano del horizonte. Un rayo de Sol que incide en este punto, y que continúa hasta la superficie del reloj, vendrá representando en coordenadas paramétricas por el vector

$$\vec{l}_h(x_n, y_n, z_n; \theta, H, \delta; \lambda) = \vec{v}_h + \lambda \vec{u}_h(\phi, H, \delta).$$

Sea ahora $\vec{e}_{z_h} = (0, 0, 1)^T$ el vector unitario sobre el eje z_h . Si el cuadrante del reloj está en el plano horizontal, la sombra del punto (x_n, y_n, z_n) interseca al cuadrante cuando

$$\vec{e}_{z_h} \cdot \vec{l}_h = (0 \ 0 \ 1)^T \vec{l}_h = 0 \Rightarrow z_n + \lambda (\cos \phi \cos H \cos \delta + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta) = 0,$$

lo cual se da cuando

$$\lambda = -\frac{z_n}{\cos \phi \cos H \cos \delta + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \delta}.$$

Notar que el denominador es positivo cuando el Sol está sobre el horizonte, que es cuando los rayos de luz producen una sombra sobre la superficie del reloj. Las coordenadas del punto del cuadrante en el que se proyecta la sombra serán por tanto

$$(x, y) = \left(x_n + z_n \frac{\text{sen } H}{\cos \phi \cos H + \text{sen } \phi \tan \delta}, y_n + z_n \frac{\text{sen } \phi \cos H - \cos \phi \tan \delta}{\cos \phi \cos H + \text{sen } \phi \tan \delta} \right). \quad (2.2)$$

Según va variando la declinación δ del Sol a lo largo del año obtenemos un conjunto de puntos para cada ángulo horario H . La unión de estos puntos es la línea horaria para esa hora H concreta. Cuando $|\tan \delta|$ crece el punto de sombra tiende al punto

$$(x_c, y_c) = \left(x_n, y_n - \frac{z}{\tan \phi} \right),$$

que recibe el nombre de *centro del reloj*.

Consideremos ahora la línea que va del *centro del reloj* a un punto (x, y) que cumple (2.2). Sea α el ángulo entre esta línea y el eje y_h , entonces la tangente de este ángulo es

$$\tan \alpha = \frac{x - x_c}{y - y_c} = \frac{x - x_n}{y - y_n + z_n / \tan \phi}$$

que, sustituyendo x e y por su expresión en (2.2), se convierte en la ecuación (1.4) del reloj horizontal que ya conocemos:

$$\tan \alpha = \text{sen } \phi \tan H.$$

Notar que la ecuación (2.2) nos permite dibujar un reloj mucho más completo que con esta última. Podemos dibujar también las líneas de declinación, haciendo variar H para un valor δ concreto, añadiendo así un *calendario* a nuestro reloj.

2.3. Cuadrante general

Veamos ahora cómo sería un reloj situado en un plano cualquiera, *plano del reloj* o *cuadrante*. Sean $\vec{e}_{x_h} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{e}_{y_h} = (0, 1, 0)^T$, $\vec{e}_{z_h} = (0, 0, 1)^T$ vectores unitarios asociados a los ejes del sistema de referencia horizontal. Sea también $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)^T$ un vector unitario normal al *plano del reloj* en el sistema de referencia horizontal. La orientación del reloj la podemos expresar con el vector \vec{p} o definiendo dos ángulos, *inclinación* y *declinación*. La inclinación, θ_i , $0^\circ \leq \theta_i \leq 180^\circ$, es el ángulo que forma el vector \vec{p} con el vector \vec{e}_{z_h} ,

$$\theta_i = \arccos \left(\frac{\vec{e}_{z_h} \cdot \vec{p}}{|\vec{e}_{z_h}| \cdot |\vec{p}|} \right) = \arccos(p_z).$$

El ángulo de declinación, θ_d , -90° (*este*) $\leq \theta_d \leq 90^\circ$ (*oeste*), es el ángulo entre el vector proyección de \vec{p} sobre el *plano del horizonte* y el vector \vec{e}_{y_h} . De este modo, podemos por lo tanto expresar \vec{p} como

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -\text{sen } \theta_i \text{ sen } \theta_d \\ -\text{sen } \theta_i \text{ cos } \theta_d \\ \text{cos } \theta_i \end{pmatrix}.$$

Consideremos ahora un sistema de referencia ortogonal con el plano (x, y) coincidente con la superficie del reloj, el plano (x, z) con el meridiano que pasa por el lugar (dirección norte-sur) y \vec{z} definido por \vec{p} . En este nuevo sistema de coordenadas el vector $\vec{u}_h(\theta, H, \delta)$, que va del reloj al Sol y que está definido por la ecuación (2.1), queda como

$$\vec{u}_r(\theta, H, \delta; \theta_i, \theta_d) = R_x(-\theta_i)R_z(\theta_d)\vec{u}_h(\theta, H, \delta)$$

y, teniendo en cuenta que

$$R_x(-\theta_i)R_z(\theta_d) = \begin{pmatrix} \cos\theta_d & -\text{sen}\theta_d & 0 \\ \cos\theta_i \text{sen}\theta_d & \cos\theta_i \cos\theta_d & \text{sen}\theta_i \\ -\text{sen}\theta_i \text{sen}\theta_d & -\text{sen}\theta_i \cos\theta_d & \cos\theta_i \end{pmatrix},$$

resulta

$$\vec{u}_r(\theta, H, \delta; \theta_i, \theta_d) = \cos\delta \begin{pmatrix} -\cos\theta_d \text{sen}H + \text{sen}\theta_d \text{sen}\phi \cos H \\ -\text{sen}\theta_d \cos\phi \tan\delta \\ -\cos\theta_i \text{sen}\theta_d \text{sen}H - \cos\theta_i \cos\theta_d \text{sen}\phi \cos H \\ + \cos\theta_i \cos\theta_d \cos\phi \tan\delta + \text{sen}\theta_i \cos\phi \cos H \\ + \text{sen}\theta_i \text{sen}\phi \tan\delta \\ \text{sen}\theta_i \text{sen}\theta_d \text{sen}H + \text{sen}\theta_i \cos\theta_d \text{sen}\phi \cos H \\ - \text{sen}\theta_i \cos\theta_d \cos\phi \tan\delta + \cos\theta_i \cos\phi \cos H \\ + \cos\theta_i \text{sen}\phi \tan\delta \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Sea ahora $\vec{v}_r = (x_n, y_n, z_n)^T$ el vector que va del origen de coordenadas, centro del reloj, al gnomon, punto (x_n, y_n, z_n) . Las coordenadas de nuestro rayo de luz y su sombra serán en este caso

$$\vec{l}_r = (x, y_n, z_n; \phi, H, \delta; \theta_i, \theta_d; \lambda) = \vec{v}_r + \lambda \vec{u}_r(\theta, H, \delta; \theta_i, \theta_d). \quad (2.4)$$

El punto de intersección de \vec{l}_r con el *plano del reloj* se da para un λ tal que $\vec{e}_{z_r} \cdot \vec{l}_r = (0 \ 0 \ 1)^T \cdot \vec{l}_r = 0$, es decir

$$\lambda = -\frac{\vec{e}_{z_r} \cdot \vec{v}_r}{\vec{e}_{z_r} \cdot \vec{u}_r(\theta, H, \delta; \theta_i, \theta_d)} = -\frac{z_n}{D \cos\delta},$$

siendo

$$D = \text{sen}\theta_i \text{sen}\theta_d \text{sen}H + \text{sen}\theta_i \cos\theta_d \text{sen}\phi \cos H \\ - \text{sen}\theta_i \cos\theta_d \cos\phi \tan\delta + \cos\theta_i \cos\phi \cos H \\ + \cos\theta_i \text{sen}\phi \tan\delta.$$

Notemos que D es positivo siempre que lleguen rayos de sol a la superficie del reloj. A partir de (2.3) y (2.4) nos da las coordenadas del punto (x, y) , con

$$x = x_n + \frac{z_n}{D} (\cos\theta_d \text{sen}H - \text{sen}\theta_d \text{sen}\phi \cos H + \text{sen}\theta_d \cos\phi \tan\delta) \quad (2.5)$$

e

$$y = y_n + \frac{z_n}{D} (\cos\theta_i \text{sen}\theta_d \text{sen}H + \cos\theta_i \cos\theta_d \text{sen}\phi \cos H \\ - \cos\theta_i \cos\theta_d \cos\phi \tan\delta - \text{sen}\theta_i \cos\phi \cos H \\ - \text{sen}\theta_i \text{sen}\phi \tan\delta). \quad (2.6)$$

En este caso tendremos que el punto (x_c, y_c) , *centro del reloj*, al que tiende el de sombra (x, y) es

$$\begin{cases} x_c = x_n + z_n \frac{\text{sen } \theta_d \cos \phi}{\cos \theta_i \text{sen } \phi - \text{sen } \theta_i \cos \theta_d \cos \phi} \\ y_c = y_n - z_n \frac{\text{sen } \theta_i \text{sen } \phi + \cos \theta_i \cos \theta_d \cos \phi}{\cos \theta_i \text{sen } \phi - \text{sen } \theta_i \cos \theta_d \cos \phi} \end{cases} \quad (2.7)$$

Si llamamos α al ángulo entre el eje y_r y la línea que une el *centro del reloj* con un punto de sombra (x, y) , dado por las ecuaciones (2.5) y (2.6), la tangente de este ángulo vendrá dada por

$$\tan \alpha = \frac{x - x_c}{y - y_c},$$

que, teniendo en cuenta (2.5), (2.6) y (2.7), se convierte en

$$\tan \alpha = - \frac{(\text{sen } \theta_i \cos \phi - \cos \theta_i \cos \theta_d \text{sen } \phi) \tan H + \cos \theta_i \text{sen } \theta_d}{\cos \theta_d + \text{sen } \theta_d \text{sen } \phi \tan H}, \quad (2.8)$$

que nos da el ángulo que forma cada línea horaria H con la dirección y_r (sur) y con esto, y a partir del *centro del reloj*, ya podríamos dibujar nuestro reloj. Otra opción es hacerlo directamente a partir de (2.5) y (2.6), dibujando para cada hora H los puntos de sombra para las declinaciones máxima, $\delta = 23,4^\circ$ (solsticio de verano), y mínima, $\delta = -23,4^\circ$ (solsticio de invierno), y unir las mediante una línea recta. Al igual que en el caso del reloj horizontal, podemos añadir las líneas de declinación.

Observar que utilizando la tabla siguiente y sustituyendo en (2.8) podemos obtener las ecuaciones de los relojes del capítulo anterior.

Orientación	Vector normal \vec{p}	Inclinación θ_i	Declinación θ_d
horizontal	$(0, 0, 1)^T$	0°	no definido
vertical orientación S	$(0, 1, 0)^T$	90°	0°
vertical orientación E	$(-1, 0, 0)^T$	90°	90°
vertical orientación O	$(1, 0, 0)^T$	90°	-90°
vertical orientación SE	$(1, 1, 0)^T \frac{1}{\sqrt{2}}$	90°	45°

Por ejemplo, si hacemos $\theta_i = 90^\circ$ en (2.8) obtenemos

$$\tan \alpha = - \frac{\cos \phi \tan H}{\cos \theta_d + \text{sen } \theta_d \text{sen } \phi \tan H},$$

que, salvo el signo, debido la forma de medir la declinación, es igual a la ecuación de los relojes de sol verticales obtenida en 1.6.2.

Si hacemos $\theta_i = 0^\circ$ en (2.8), nos queda

$$\tan \alpha = - \frac{\cos \theta_d \text{sen } \phi \tan H + \text{sen } \theta_d}{\cos \theta_d + \text{sen } \theta_d \text{sen } \phi \tan H},$$

con θ_d arbitrario. Si $\theta_d = 0$ se transforma en

$$\tan \alpha = -\operatorname{sen} \phi \tan H,$$

i.e., la ecuación de un reloj horizontal ya vista en 1.5.

Capítulo 3

Correcciones horarias

3.1. Introducción. Tiempo solar y tiempo sidéreo.

Es evidente que la hora que marcan los relojes de sol de las secciones anteriores no coincide con la hora que usamos normalmente, *hora civil*. Los relojes de sol nos dan lo que se denomina *tiempo solar verdadero*, esto es, el ángulo horario del Sol (sección 1.3). Con lo cual una primera corrección que deberíamos hacer sería sumarle 12 horas, ya que en el horario civil los días no comienzan y acaban al mediodía.

Con esto tendríamos la hora solar de nuestra posición, en realidad de cualquier punto del planeta con nuestra longitud. Pero, como sabemos, la hora civil de cualquier punto de la España continental es la misma. Esta hora civil es tal que a las 12:00 el Sol debería estar en el meridiano del lugar, pero como no puede estarlo en todos los sitios, esto solo se cumple para el meridiano de referencia de la zona horaria. Así pues, hay que corregir la hora de un reloj de sol según la longitud del lugar. En concreto, en Logroño deberíamos añadir 1 hora, debido a que España utiliza la zona horaria $UTC + 1$ cuando, por longitud, le correspondería $UTC + 0$, y 10 minutos, ya que Logroño está a $2,4^\circ$ al oeste del meridiano de Greenwich (meridiano de referencia para la zona horaria $UTC + 0$). Además de esto también se debería de añadir una hora durante el horario de verano (27 de marzo a 29 de octubre).

Sin embargo estas no son las únicas correcciones. Hay dos correcciones más sutiles que deben hacerse. Para ello fijémonos en la hora a la que el Sol pasa por el meridiano de Logroño a lo largo de un año (Figura 3.1), en tiempo $UTC + 1$.

Fecha	Salida	Mediodía solar	Puesta
1 de enero	8:40	13:14	17:47
1 de febrero	8:25	13:24	18:23
1 de marzo	7:46	13:23	19:00
1 de abril	6:52	13:14	19:36
1 de mayo	6:05	13:08	20:10
1 de junio	5:36	13:09	20:41
1 de julio	5:37	13:14	20:52
1 de agosto	6:03	13:17	20:31
1 de septiembre	6:36	13:11	19:45
1 de octubre	7:08	13:00	18:52
1 de noviembre	7:44	12:54	18:04
1 de diciembre	8:21	13:00	17:39

Cuadro 3.1: Mediodía solar para Logroño 2016. Observatorio Astronómico Nacional.

Como podemos ver, el mediodía solar, instante en el que el Sol está en su punto más alto, i.e., paso por el meridiano, no ocurre siempre a la misma hora durante todo el año. Con las correcciones anteriores debería producirse alrededor de las 13:10, pero tenemos que el 1 de noviembre lleva un adelanto de 16 minutos y el 1 de febrero un retraso de 14 minutos. Esto se debe principalmente a dos causas pero, antes de pasar a analizarlas, vamos a necesitar de algunas definiciones que tienen que ver con distintos tipos de tiempo.

- **Tiempo solar verdadero** es, como ya hemos dicho, el ángulo horario del *Sol verdadero* (S_v), ángulo que forma el meridiano que pasa por el Sol con el meridiano del lugar. Como hemos visto, el tiempo solar verdadero no varía de modo uniforme.
- **Tiempo solar medio** es el ángulo horario del *Sol medio* (S_m), punto de referencia imaginario que recorre el ecuador con velocidad constante a lo largo de un año. Es el tiempo que usamos para uso civil.
- **Tiempo sidéreo** es el ángulo horario del punto vernal y se denomina por θ . Es fácil ver que, dado un astro cualquiera, $\theta = \alpha + H$, siendo α la *ascensión recta* y H el *ángulo horario* del astro (ver 1.3). Se trata de un tiempo que varía de forma casi uniforme, aunque también se ve afectado por los movimientos de *precesión* y *nutación*, movimientos que no tendremos en cuenta en este trabajo (ver [1]).

3.2. Ecuación del tiempo

Tenemos, por tanto, distintas formas de medir o dar el tiempo. Nos interesa especialmente la diferencia entre el tiempo solar verdadero (el de nuestro reloj de Sol) y el tiempo solar medio, ya que este último se corresponde con el tiempo civil, que

es el que marca nuestro reloj de pulsera. Esta diferencia es lo que se denomina **ecuación del tiempo**, ET , y que puede escribirse como

$$ET = H_{SV} - H_{SM},$$

siendo H_{SV} el ángulo horario del *Sol verdadero* y H_{SM} el del *Sol medio*. A esta diferencia se le llama así ya que, antiguamente en astronomía, la palabra *ecuación* se usaba para denotar una corrección que se añadía al valor medio de una determinada cantidad con el fin de obtener el verdadero valor de la misma.

Como ya hemos mencionado anteriormente, dos son las causas que contribuyen a que la ecuación del tiempo no sea idénticamente cero:

(C1) La oblicuidad de la eclíptica.

(C2) La excentricidad de la órbita de la Tierra en torno al Sol.

Aunque la ecuación del tiempo es el resultado del efecto combinado de ambas causas, vamos a analizar por separado cada una de ellas viendo cómo se producen los desfases entre el tiempo solar verdadero y el tiempo solar medio. Para ello seguiremos las ideas dadas en [5],

3.2.1. Primera causa (C1): la oblicuidad de la eclíptica.

Como ya vimos en la sección 1.2, el eje de rotación de la Tierra no es perpendicular al plano de la órbita terrestre, o eclíptica, ya que el plano del ecuador terrestre y el plano de la eclíptica forman un ángulo de $23,4^\circ$, de manera que la dirección del eje de rotación terrestre es fija a lo largo del año, como se ve en la Figura 3.1.

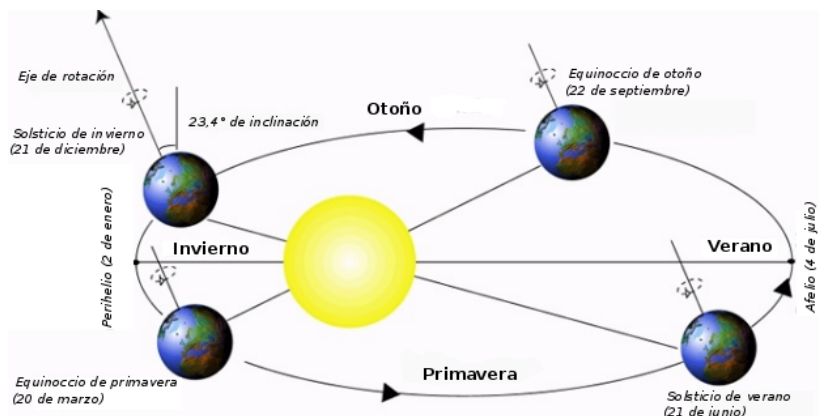


Figura 3.1: Movimiento de traslación con fechas para Logroño (2016).

Para poder entender cómo el hecho de que el eje de rotación esté inclinado afecta al desfase horario, supondremos que la Tierra se mueve alrededor del Sol en órbita circular, es decir, con movimiento uniforme. En este caso, hacemos notar que, de las dos causas que afectan a la ecuación del tiempo, solo estamos considerando (C1).

Así, tendremos que, desde el punto de vista de un observador en la Tierra, el *Sol verdadero* se mueve por el plano de la eclíptica, mientras que el *Sol medio* lo hace por el ecuador. Debido a esto, sus ángulos horarios no van a ser iguales, salvo en los equinoccios y solsticios (ver Figuras 3.2 y 3.3).

Para ver esto de una manera clara, utilizaremos dos sistemas de referencia. El primero es el sistema de referencia de las coordenadas ecuatoriales absolutas (visto en sección 1.3), i.e., el origen en el centro de la Tierra, el eje z coincidente con el eje de rotación, el plano xy coincidente con el plano del ecuador y el eje x en la dirección del punto vernal. El segundo sistema, (x', y', z') , es el sistema de coordenadas eclípticas, cuyo eje x' coincide con el eje x de las coordenadas ecuatoriales, pero ahora el plano $x'y'$ es el de la eclíptica, con el eje z' perpendicular al mismo. Para pasar de un sistema de referencia a otro lo hacemos a través de un giro de eje x y ángulo ε , que es la oblicuidad de la eclíptica: $\varepsilon = 23,4^\circ$. En la Figura 3.2 se representa al Sol verdadero y al medio en estos sistemas de referencia.

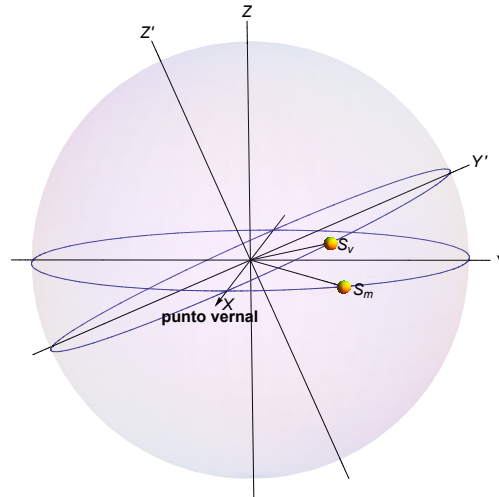


Figura 3.2: El Sol verdadero y el Sol medio en los sistemas de referencia ecuatorial y eclíptico.

Denotemos por V_a al vector de posición Sol verdadero y por V_m al del Sol medio y sea v_a la proyección de V_a sobre el plano del ecuador. La diferencia horaria entre el Sol verdadero y el Sol medio va a ser igual a la diferencia angular entre los vectores v_a y V_m , ambos sobre el plano del ecuador, ya que V_a y v_a se encuentran sobre el mismo meridiano (ver Figura 3.3). Es decir, el ángulo ξ que forman los vectores v_a y

V_m es igual a la ecuación del tiempo¹

$$\xi = H_{SV} - H_{SM},$$

de manera que si $\xi < 0$ el mediodía solar verdadero tiene lugar antes que el mediodía solar medio, lo que ocurre durante la primavera y el otoño. Por el contrario, en verano e invierno $\xi > 0$ y el mediodía solar verdadero tiene lugar después del mediodía solar medio. Como ya hemos dicho, sólo los días de los equinoccios y los solsticios coinciden ambos mediodías.

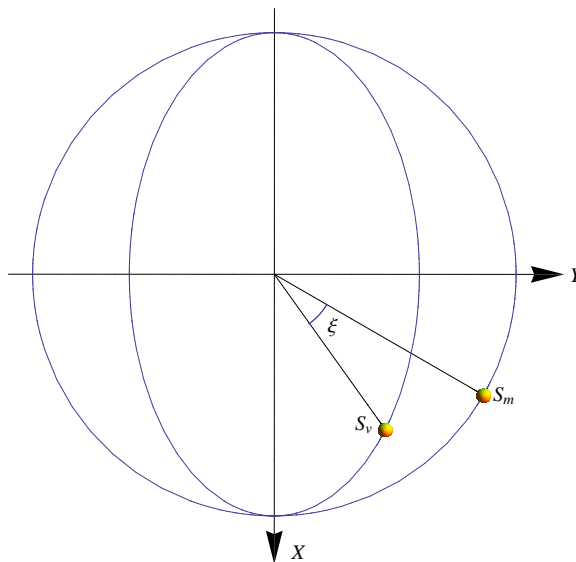


Figura 3.3: Proyección de la posición del Sol verdadero y del Sol medio sobre el plano ecuatorial.

Para calcular explícitamente el ángulo ξ vemos que, debido al movimiento uniforme a lo largo del año, las coordenadas del Sol medio, en el sistema de referencia ecuatorial son

$$V_m = (\cos M, \text{sen } M, 0),$$

siendo M la denominada *anomalía media*, que es igual a nt , donde n es el movimiento medio que expresa el ángulo girado por unidad de tiempo: $n = 2\pi/T$ y T el periodo orbital. De la misma forma, la posición del Sol verdadero en el sistema de referencia eclíptico viene dada por

$$(x', y', z') = (\cos M, \text{sen } M, 0). \quad (3.1)$$

¹Como la Tierra realiza una rotación de 360° en 24 horas, gira un grado cada 4 minutos. Por tanto la diferencia entre el mediodía solar verdadero y el mediodía solar medio, en minutos, es 4ξ , con el ángulo expresado en grados.

Puesto que la relación entre un sistema de referencia y otro viene dada a través de un giro de eje x y ángulo ε , resulta que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\operatorname{sen} \varepsilon \\ 0 & \operatorname{sen} \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

por lo que las coordenadas del Sol verdadero en el sistema de referencia ecuatorial serán

$$V_a = (\cos M, \operatorname{sen} M \cos \varepsilon, \operatorname{sen} M \operatorname{sen} \varepsilon).$$

De este modo $v_a = (\cos M, \operatorname{sen} M \cos \varepsilon, 0)$ y el ángulo ξ puede obtenerse a partir del producto escalar y vectorial de los vectores V_m y v_a . En este sentido, se tiene que

$$v_a \cdot V_m = (\cos M)^2 + (\operatorname{sen} M)^2 \cos \varepsilon \Rightarrow \cos \xi = \frac{\cos^2 M + \operatorname{sen}^2 M \cos \varepsilon}{\sqrt{\cos^2 M + \operatorname{sen}^2 M \cos^2 \varepsilon}}.$$

Como se ve, $\cos \xi \geq 0$ y el signo de ξ viene determinado por el signo del seno del ángulo. Ahora bien,

$$v_a \times V_m = (0, 0, \operatorname{sen} M \cos M (1 - \cos \varepsilon)).$$

Por tanto, ξ será negativo si $\operatorname{sen} 2M > 0$ y positivo si $\operatorname{sen} 2M < 0$.

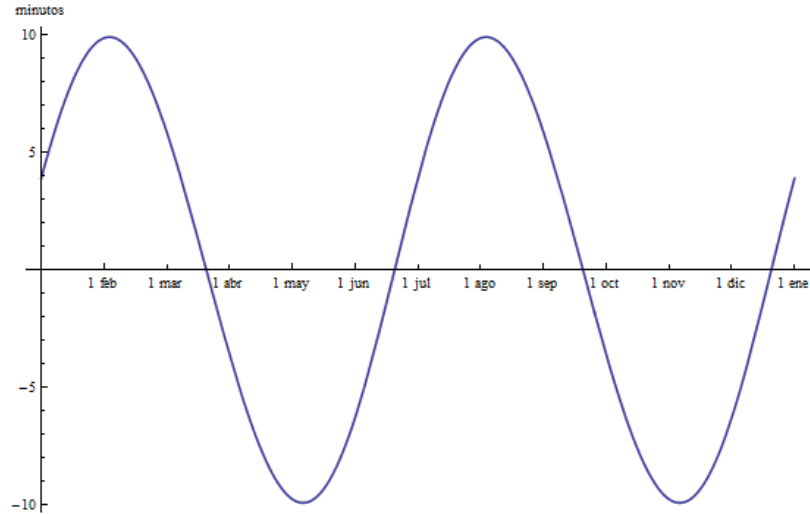


Figura 3.4: Ecuación del tiempo por el efecto debido a la oblicuidad de la eclíptica.

Una vez obtenido ξ , podemos ver gráficamente la ecuación del tiempo a lo largo del año, lo que queda reflejado en la Figura 3.4. Como se ve, es un efecto estacional que se denomina *reducción al ecuador*, ya que es la corrección que habría que considerar si proyectamos el movimiento del Sol por la eclíptica sobre el plano del ecuador. El desfase máximo es aproximadamente de 10 minutos, tanto de adelanto

como de retraso. El máximo retardo se produce en los máximos, que ocurren aproximadamente el 3 de febrero y el 6 de julio. Por el contrario, el adelanto máximo se produce en los mínimos, que tienen lugar hacia el 7 de mayo y 5 de noviembre. Estas fechas se pueden calcular teniendo en cuenta que los extremos relativos de la función $\cos \xi$ ocurren cuando

$$\cos 2M = \frac{\cos \varepsilon - 1}{\cos \varepsilon + 1}.$$

3.2.2. Segunda causa (C2): la excentricidad de la órbita de la Tierra.

Como sabemos la órbita de la Tierra en torno al Sol no es exactamente circular, sino que es ligeramente elíptica siendo su excentricidad $e = 0,01671022$. Esta órbita está sujeta a las leyes de Kepler y, en consecuencia, el movimiento a lo largo de la misma no es constante. Esto es lo que se desprende de la segunda ley de Kepler (Figura 3.5), según la cual, la velocidad areolar es constante y por tanto la velocidad de la Tierra es mayor cuanto más cerca del Sol se encuentra. Por ejemplo, este año, 2016, la Tierra estuvo en su perihelio (posición de la órbita más cercana al Sol) el 2 de enero y en su afelio (posición más alejada del Sol) el 4 de julio. Por lo tanto en torno al 2 de enero los días solares tuvieron más de 24 horas, siendo más cortos a primeros de julio.

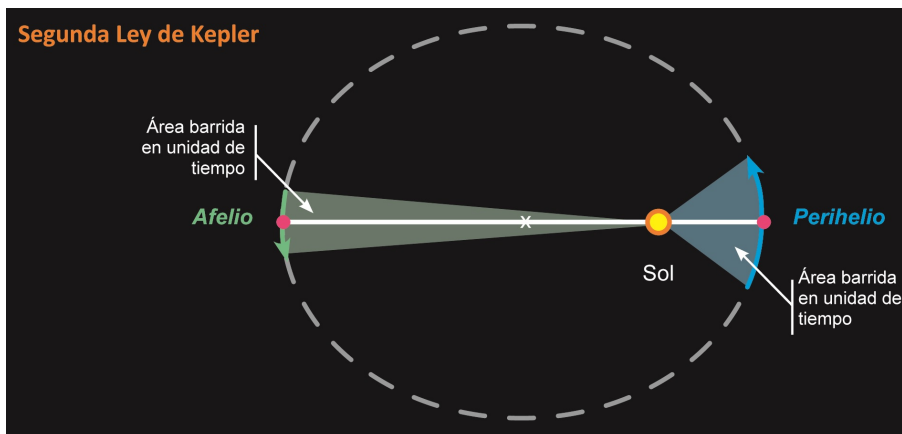


Figura 3.5: Segunda ley de Kepler.

Es evidente que este movimiento no uniforme va a tener como consecuencia que el tiempo solar verdadero difiera del tiempo solar medio, afectando a la ecuación de tiempo. Para ver en qué medida afecta la excentricidad de la órbita terrestre, no tendremos en cuenta la oblicuidad de la eclíptica y supondremos que el Sol verdadero y el Sol medio se mueven ambos sobre el plano del ecuador, el primero siguiendo una órbita elíptica, gobernada por las leyes de Kepler, y el segundo en órbita circular con movimiento uniforme.

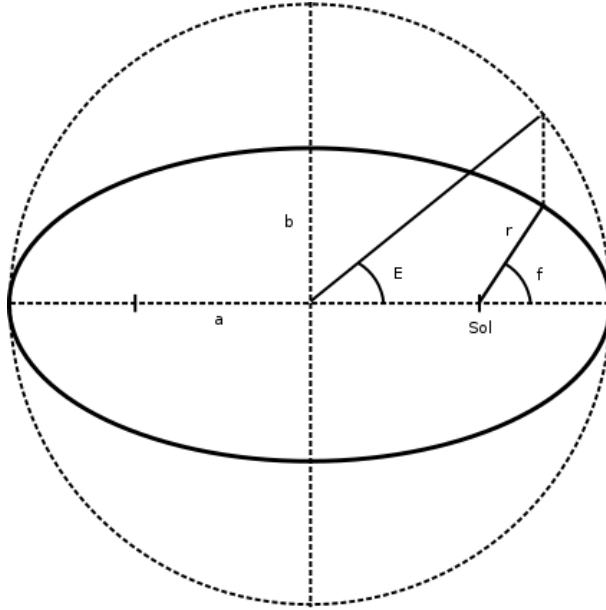


Figura 3.6: Coordenadas de la elipse y anomalías.

Antes de pasar a calcular la diferencia entre los ángulos horarios del Sol verdadero y el Sol medio, debemos introducir los elementos fundamentales relativos al movimiento kepleriano. No vamos a entrar en detalles sobre esto y referimos al lector a las referencias [1, 2, 6]. En primer lugar, introducimos un ángulo f , que recibe el nombre de *anomalía verdadera*, que es el ángulo que forman el vector que une el Sol y la Tierra con el vector en la dirección del perihelio (ver Figura 3.6). Este es el ángulo que define la elipse en coordenadas polares, de manera que

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos f}, \quad (3.3)$$

siendo r la distancia entre el Sol y la Tierra, a el semeje mayor de la órbita y e la excentricidad.

Sin embargo, (3.3) no es la única manera de dar la ecuación de la elipse. Si introducimos la parametrización natural

$$x = a \cos E, \quad y = b \sin E,$$

con b el semeje menor, resulta

$$r = a(1 - e \cos E),$$

donde el ángulo E , que aparece reflejado en la Figura 3.6, recibe el nombre de *anomalía excéntrica*. No es difícil encontrar una relación entre la anomalía verdadera y excéntrica. En concreto se tiene que

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (3.4)$$

El ángulo f tiene una interpretación muy clara y es el ángulo girado por la Tierra alrededor del Sol. Sin embargo este ángulo no varía de manera uniforme y encontrar la función que expresa f en función de t no es sencillo. Esto se hace de manera indirecta a través de la ecuación de Kepler

$$M = E - e \operatorname{sen} E, \quad (3.5)$$

siendo M la anomalía media, introducida en la sección 3.2.1. No obstante, la segunda ley de Kepler nos proporciona otra manera de relacionar f y t . En efecto, como la velocidad areolar es constante se cumple

$$\frac{r^2}{2} \frac{df}{dt} = C. \quad (3.6)$$

Una vez vistas las generalidades del movimiento kepleriano, la diferencia entre el ángulo horario del Sol verdadero y el del Sol medio va a ser igual a $f - M$, denominada *ecuación del centro*, por lo que es necesario dar una expresión de f en función de t . Esto lo podemos hacer usando la ecuación (3.6), aunque clásicamente se hace a través de (3.5), como veremos en la siguiente sección.

Teniendo en cuenta (3.3), podemos escribir la ecuación (3.6) de la siguiente forma

$$\frac{a^2(1-e^2)^2}{2C} \frac{1}{(1-e\cos f)^2} df = dt,$$

que es una ecuación diferencial en variables separadas. Sea $K = \frac{a^2(1-e^2)^2}{2C}$. Integrando y aplicando que $f = 0$ cuando $t = 0$ tenemos que

$$t = \int_0^t ds = \int_0^f \frac{K}{(1-e\cos\theta)^2} d\theta.$$

El valor de la constante K se fija teniendo en cuenta que, para $f = 2\pi$, $t = 1$, siempre y cuando el tiempo lo midamos en años. Considerando que $e = 0,017$ resulta $K = 6,28591$, y entonces

$$t(f) = \int_0^f \frac{1}{6,28591(1-e\cos\theta)^2} d\theta.$$

A partir de esta relación podemos obtener la gráfica que aparece en la Figura 3.7 que nos da la diferencia entre la anomalía verdadera y la anomalía media. Como se ve los desfases máximo y mínimo son aproximadamente de 8 minutos y se producen cuando la anomalía verdadera del Sol es aproximadamente $\pi/2$ y $3\pi/2$, respectivamente. Esto ocurre más o menos hacia el 1 de abril y el 1 de octubre.

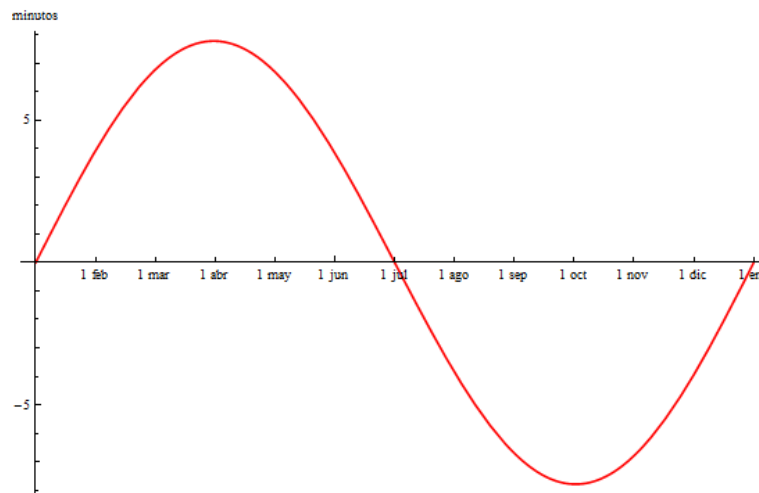


Figura 3.7: Ecuación del tiempo para una órbita elíptica (con $e = 0,017$), sin tener en cuenta la oblicuidad de la eclíptica.

Una vez visto el efecto por separado de cada una de las causas que influyen en la ecuación del tiempo, podemos ver el efecto combinado de ambas: la oblicuidad (C1) y la excentricidad (C2) sumándolos. El resultado se recoge en la Figura 3.8, que es una variación estacional, modulada por la ecuación del centro. Las diferencias máximas se producen hacia mediados de febrero (alrededor de 15 minutos) y primeros de noviembre (alrededor de 17 minutos).

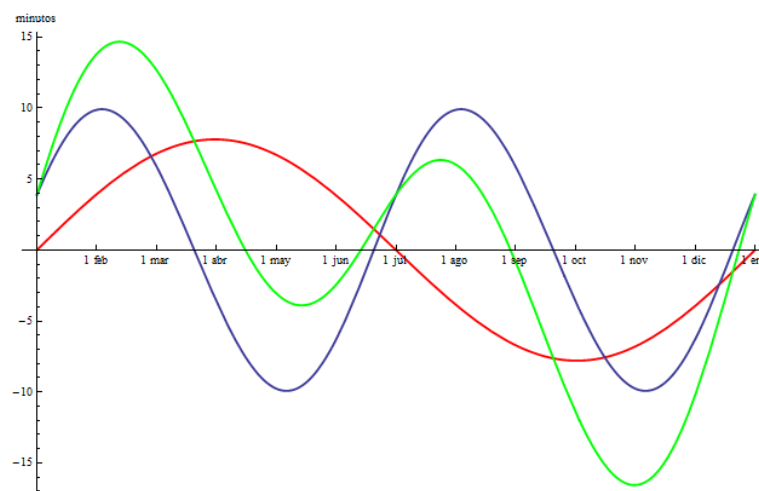


Figura 3.8: En verde la ecuación del tiempo a lo largo del año, como suma de los efectos de la oblicuidad de la eclíptica y de la excentricidad de la órbita. En azul, la reducción al ecuador y en rojo, la ecuación del centro.

3.3. Cálculo de la ecuación del tiempo

La sección anterior nos ha permitido ver cómo influyen en la ecuación del tiempo, por separado, la oblicuidad de la eclíptica y la excentricidad de la órbita terrestre. Sin embargo, la ecuación del tiempo no es exactamente la suma de los dos efectos y su cálculo debe hacerse directamente a partir de su definición:

$$ET = H_{SV} - H_{SM}.$$

La forma más fácil de hacerlo es a través del tiempo sidéreo. Por una parte, tenemos que el tiempo sidéreo es

$$\theta = H_{SV} + \alpha_{SV}, \quad (3.7)$$

pero, por otra parte, también el tiempo sidéreo se puede obtener a partir del Sol medio como

$$\theta = H_{SM} + \alpha_{SM}. \quad (3.8)$$

Por tanto, restando (3.7) y (3.8), podemos escribir la ecuación del tiempo como

$$ET = \alpha_{SM} - \alpha_{SV}.$$

Si llamamos α a α_{SV} y l a α_{SM} nos queda:

$$ET = l - \alpha. \quad (3.9)$$

Consideremos ahora la *esfera celeste* con centro en la Tierra (Figura 3.9), de manera que el Sol describe una órbita elíptica en el plano de la eclíptica. Sea Θ la longitud eclíptica del *Sol verdadero* (S_v). Tenemos entonces que el arco $\widehat{\gamma S_v} = \Theta$ y, sumando y restando Θ en (3.9), resulta

$$ET = (\Theta - \alpha) - (\Theta - l). \quad (3.10)$$

Sea el punto A de la Figura 3.9 el perihelio de la órbita, entonces el arco $\widehat{AS_v}$ es la anomalía verdadera, f . Por otra parte, sea S_o un Sol ficticio que se desplaza por la eclíptica con movimiento uniforme y a la misma velocidad angular que el Sol medio (S_m). Por tanto, $\widehat{AS_o}$ es la anomalía media, M , y $\widehat{\gamma S_o} = l$. Tenemos entonces que,

$$\Theta - l = \widehat{\gamma S_v} - \widehat{\gamma S_o} = \widehat{AS_v} - \widehat{AS_o} = f - M,$$

con lo que podemos reescribir (3.10) como

$$ET = -(\alpha - \Theta) - (f - M). \quad (3.11)$$

Así, la ecuación del tiempo queda dividida en dos sumandos, cada uno de los cuales da cuenta de uno de los efectos descritos en la sección anterior:

- (P1) La cantidad $\alpha - \Theta$, llamada *reducción al ecuador*, da cuenta del efecto debido a la oblicuidad de la eclíptica.
- (P2) La cantidad $f - M$, llamada *ecuación del centro*, da cuenta del efecto de la excentricidad de la órbita terrestre.

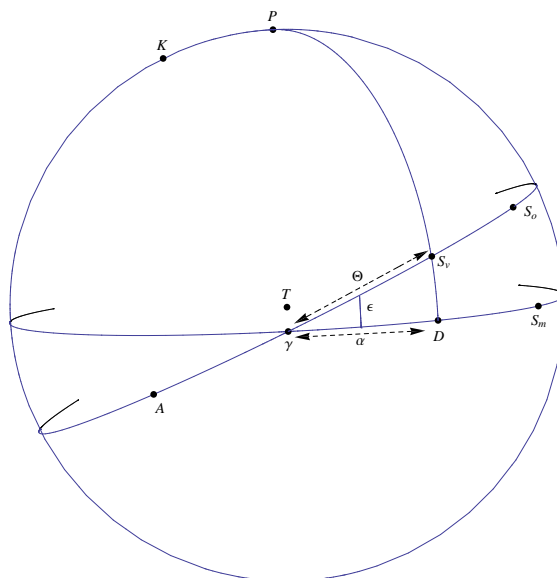


Figura 3.9: El Sol verdadero y el Sol medio sobre la esfera celeste.

Calculamos primero la *reducción al ecuador*, $(\alpha - \Theta)$. Para ello haremos uso de la relación entre las coordenadas ecuatoriales y eclípticas, dada por (3.2). Así, en coordenadas ecuatoriales, las coordenadas del Sol verdadero son

$$(\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \operatorname{sen} \alpha, \operatorname{sen} \delta),$$

siendo α y δ la ascensión recta y la declinación, respectivamente, mientras que en coordenadas eclípticas sus coordenadas son

$$(\cos \Theta, \operatorname{sen} \Theta, 0).$$

Entonces, por (3.2), se tiene

$$\begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\operatorname{sen} \varepsilon \\ 0 & \operatorname{sen} \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \Theta \\ \operatorname{sen} \Theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando la ecuación anterior resulta

$$\begin{cases} \cos \delta \cos \alpha = \cos \Theta, \\ \cos \delta \operatorname{sen} \alpha = \cos \varepsilon \operatorname{sen} \Theta, \\ \operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} \varepsilon \operatorname{sen} \Theta. \end{cases}$$

y, dividiendo las dos primeras ecuaciones, se obtiene

$$\tan \alpha = \operatorname{cose} \tan \Theta,$$

que se puede reescribir como

$$\tan \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\varepsilon}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\varepsilon}{2}} \tan \Theta. \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) suele obtenerse en los libros clásicos de Astronomía mediante el uso de trigonometría esférica, como se hace en [3, 6].

Es interesante ver que en la ecuación (3.12) está implícita la reducción al ecuador. Para obtenerla de una forma explícita, notemos que, puesto que $\varepsilon = 23,4^\circ$,

$$\tan^2 \frac{\varepsilon}{2} \approx 0,04,$$

es una cantidad pequeña y, por medio del teorema de la función implícita, será posible obtener $\alpha - \Theta$ como un desarrollo en serie de potencias de y , donde $y = \tan^2 \varepsilon/2$. Con esta notación, la ecuación (3.12) queda como

$$\tan \alpha = \frac{1 - y}{1 + y} \tan \Theta. \quad (3.13)$$

Usando exponenciales complejas, tenemos que

$$\tan \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})} = \frac{e^{i2\alpha} - 1}{i(e^{i2\alpha} + 1)}.$$

Haciendo lo mismo con $\tan \Theta$, y sustituyendo en (3.13) nos queda

$$\frac{e^{i2\alpha} - 1}{e^{i2\alpha} + 1} = \frac{1 - y}{1 + y} \frac{e^{i2\Theta} - 1}{e^{i2\Theta} + 1},$$

de donde se obtiene que

$$e^{i2\alpha} = \frac{e^{i2\Theta} + y}{1 + ye^{i2\Theta}} = \frac{e^{i2\Theta}(1 + ye^{-i2\Theta})}{1 + ye^{i2\Theta}}.$$

Tomando logaritmos resulta

$$i2\alpha = i2\Theta + \log(1 + ye^{-i2\Theta}) - \log(1 + ye^{i2\Theta}),$$

y desarrollando ahora en serie de potencias los logaritmos nos queda que

$$2\alpha = 2\Theta + 2(-y \operatorname{sen} 2\Theta + \frac{y^2}{2} \operatorname{sen} 4\Theta - \frac{y^3}{3} \operatorname{sen} 6\Theta + \dots), \quad (3.14)$$

por lo que la *reducción al ecuador*, $(\alpha - \Theta)$, es igual a

$$\alpha - \Theta = -y \operatorname{sen} 2\Theta + \frac{y^2}{2} \operatorname{sen} 4\Theta - \frac{y^3}{3} \operatorname{sen} 6\Theta + \dots, \quad (3.15)$$

con α y θ expresados en radianes. Si queremos expresar la diferencia $\alpha - \Theta$ en segundos tendríamos que considerar el correspondiente factor de conversión. De este modo, como $y = \tan^2 \frac{\varepsilon}{2} = 0,043068$, obtenemos finalmente

$$\alpha - \Theta = -592^s 24 \operatorname{sen} 2\Theta + 12^s 75 \operatorname{sen} 4\Theta - 0^s 36 \operatorname{sen} 6\Theta + \dots. \quad (3.16)$$

Así, la ecuación (3.16) nos da la parte de la ecuación del tiempo que depende de la oblicuidad de la eclíptica, expresada en función de la longitud eclíptica del Sol, Θ .

Consideremos ahora el segundo sumando de la ecuación (3.11), que hemos denominado, *ecuación del centro*, $(f - M)$. Para obtener una expresión explícita en términos del tiempo, lo haremos a través de la ecuación de Kepler (3.5) que, por conveniencia, escribimos como

$$E = M + e \operatorname{sen} E. \quad (3.17)$$

Apoyándonos de nuevo en el Teorema de la función implícita, teniendo en cuenta que la excentricidad e es pequeña, podemos expresar E como una serie de potencias en e , de manera que

$$E = E_0 + E_1 e + E_2 e^2 + E_3 e^3 + \dots. \quad (3.18)$$

Los valores de E_k ($k = 0, 1, \dots$) se obtienen sustituyendo (3.18) en (3.17) e igualando los coeficientes de las diferentes potencias de e . Es decir, se obtienen a partir de la igualdad

$$E_0 + E_1 e + E_2 e^2 + E_3 e^3 + \dots = M + e \operatorname{sen}(E_0 + E_1 e + E_2 e^2 + E_3 e^3 + \dots).$$

Teniendo en cuenta que, hasta las potencias de e^3 , el segundo miembro de la igualdad anterior es

$$M + e \operatorname{sen} E_0 + e^2 E_1 \cos E_0 + \frac{e^3}{2} (2E_2 \cos E_0 - E_1^2 \operatorname{sen} E_0),$$

resulta

$$E_0 = M,$$

$$E_1 = \operatorname{sen} M,$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2M,$$

$$E_3 = \frac{1}{8} (-\operatorname{sen} M + 3 \operatorname{sen} 3M).$$

Reordenando la serie de potencias como una serie de Fourier tenemos, finalmente,

$$E \approx M + \left(e - \frac{e^3}{8}\right) \operatorname{sen} M + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2M + \frac{3}{8} e^3 \operatorname{sen} 3M. \quad (3.19)$$

Una vez que tenemos E en términos de M , o lo que es lo mismo del tiempo, el siguiente paso es expresar f como función de M . Para ello nos basaremos en la relación existente entre E y f , dada por la ecuación (3.4)

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}.$$

Esta es una expresión muy similar a (3.12) y la forma de proceder va a ser, por tanto, análoga. En primer lugar, vamos a introducir un ángulo φ de manera que

$$e = \operatorname{sen} \varphi.$$

Con esto, la ecuación (3.4) se puede escribir de la forma

$$\tan \frac{f}{2} = \frac{1 + \tan \frac{\varphi}{2}}{1 - \tan \frac{\varphi}{2}} \tan \frac{E}{2}.$$

Si en (3.13) reemplazamos α por $-\tan \varphi/2$, α por $f/2$ y Θ por $E/2$, obtenemos que

$$f = E + (e + \frac{1}{4}e^3) \operatorname{sen} E + \frac{1}{4}e^2 \operatorname{sen} 2E + \frac{1}{12}e^3 \operatorname{sen} 3E + \dots \quad (3.20)$$

Combinando, ahora, (3.19) y (3.20) podemos expresar la anomalía verdadera, f , a partir de e y M . El proceso es, una vez más, por desarrollo en serie de potencias. Observemos que, hasta las potencias de orden dos en e ,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} E &= \operatorname{sen} \left(M + (e - \frac{e^3}{8}) \operatorname{sen} M + \frac{e^2}{2} \operatorname{sen} 2M + \frac{3}{8}e^3 \operatorname{sen} 3M + \dots \right) \\ &= \left(1 - \frac{e^2}{8} \right) \operatorname{sen} M + \frac{e}{2} \operatorname{sen} 2M + \dots \end{aligned}$$

Análogamente

$$\operatorname{sen} 2E = \operatorname{sen} 2M - e \operatorname{sen} M - e^2 \operatorname{sen} 2M + e \operatorname{sen} 3M + e^2 \operatorname{sen} 4M,$$

$$\operatorname{sen} 3E = \operatorname{sen} 3M + \frac{3}{8}e^2 \operatorname{sen} M - \frac{3}{2}e \operatorname{sen} 2M - \frac{9}{4}e^2 \operatorname{sen} 3M + \frac{3}{2}e \operatorname{sen} 4M + \frac{15}{8}e^2 \operatorname{sen} 5M.$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.20) resulta

$$f - M \equiv \Theta - l = (2e - \frac{1}{4}e^3) \operatorname{sen} M + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen} 2M + \frac{13}{12}e^3 \operatorname{sen} 3M + \dots, \quad (3.21)$$

que es la *ecuación del centro*. Esta ecuación expresa la anomalía verdadera, f , en función de la excentricidad, e , y la anomalía media, M . Expresada en segundos, hasta e^2 y tomando $e = 0,01671022$, queda

$$f - M \approx 460^s 33 \operatorname{sen} M + 4^s 82 \operatorname{sen} 2M.$$

Ya tenemos tanto la *reducción al ecuador* como la *ecuación del centro*, por lo que podemos proceder a calcular la ecuación del tiempo, (3.11). Sin embargo, la reducción al ecuador está calculada en términos de la longitud eclíptica, Θ , y sería conveniente tenerla también en términos de la anomalía media. Esto lo podemos hacer a partir de la ecuación (3.21), ya que $\Theta = l + (f - M)$, es decir

$$\Theta = l + 2e \operatorname{sen} M + \frac{5}{4}e^2 \operatorname{sen} 2M + \dots.$$

De aquí se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\Theta &= \operatorname{sen}(2l + 4e \operatorname{sen} M + \dots) = \operatorname{sen} 2l + 4e \operatorname{sen} M \cos 2l + \dots, \\ \operatorname{sen} 4\Theta &= \operatorname{sen} 4l + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Sustituyendo (3.22) en el segundo miembro de (3.15), y considerando solo hasta las potencias de segundo orden en e y en y , resulta

$$\alpha - \Theta = -y \operatorname{sen} 2l - 4ey \operatorname{sen} M \cos 2l + \frac{1}{2} y^2 \operatorname{sen} 4l. \quad (3.23)$$

Sustituyendo ahora (3.23) y (3.21) en la ecuación del tiempo, (3.11), obtenemos

$$ET = y \operatorname{sen} 2l - 2e \operatorname{sen} M + 4ey \operatorname{sen} M \cos 2l - \frac{1}{2} y^2 \operatorname{sen} 4l - \frac{5}{4} e^2 \operatorname{sen} 2M, \quad (3.24)$$

que, expresada en segundos, queda como

$$\begin{aligned} ET = 592^s 2 \operatorname{sen} 2l - 460^s 3 \operatorname{sen} M + 39^s 6 \operatorname{sen} M \cos 2l \\ - 12^s 7 \operatorname{sen} 4l - 4^s 8 \operatorname{sen} 2M. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Esta ecuación todavía debe ser modificada, pues depende de dos variables: M y l . Ahora bien, si nos fijamos en la Figura 3.9, como la anomalía media es

$$M = \widehat{AS}_o = \widehat{A\gamma} + \widehat{\gamma S_o},$$

tenemos que

$$M = \widehat{A\gamma} + l.$$

Sea ω la longitud del perihelio, es decir el ángulo recorrido sobre la eclíptica desde el punto γ hasta el punto A . Entonces, tenemos que $\omega = 360^\circ - \widehat{A\gamma}$ y, por tanto,

$$M = 360^\circ + (l - \omega).$$

Así, podemos cambiar M por $l - \omega$ en (3.25) o l por $M + \omega$, teniendo en cuenta que ω es un elemento conocido de la órbita terrestre, cuyo valor es con $281,75^\circ$. De este modo (3.25) queda

$$\begin{aligned} ET \approx -97^s 8 \operatorname{sen} l - 431^s 3 \cos l + 596^s 6 \operatorname{sen} 2l - 1^s 9 \cos 2l \\ + 4^s 0 \operatorname{sen} 3l + 19^s 3 \cos 3l - 12^s 7 \operatorname{sen} 4l. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Esta ecuación nos da el valor de la *ecuación del tiempo*, hasta el orden de aproximación elegido, en función de la longitud media del Sol (l), i.e., ascensión recta del Sol medio. Si llamamos t_0 al instante en que la longitud del Sol medio es 0 y n a la velocidad angular del Sol medio, tenemos que para cada instante t

$$l(t) = n(t - t_0).$$

Puesto que t_0 tiene lugar en el equinoccio de primavera, (3.26) nos da la ecuación del tiempo a partir de esa fecha, es decir $l = 0$ cuando el Sol se encuentra en el punto vernal. Para desplazar el origen a otra fecha, basta hacer una traslación. En concreto, si queremos tomar el origen al paso del Sol por el perihelio, deberíamos considerar la ecuación del tiempo en función de M en lugar de en función de l . Haciendo esto,

se obtiene la gráfica de la Figura 3.10, que podemos comparar con la obtenida en la sección anterior (Figura 3.11) en la que se aprecian pequeñas discrepancias.

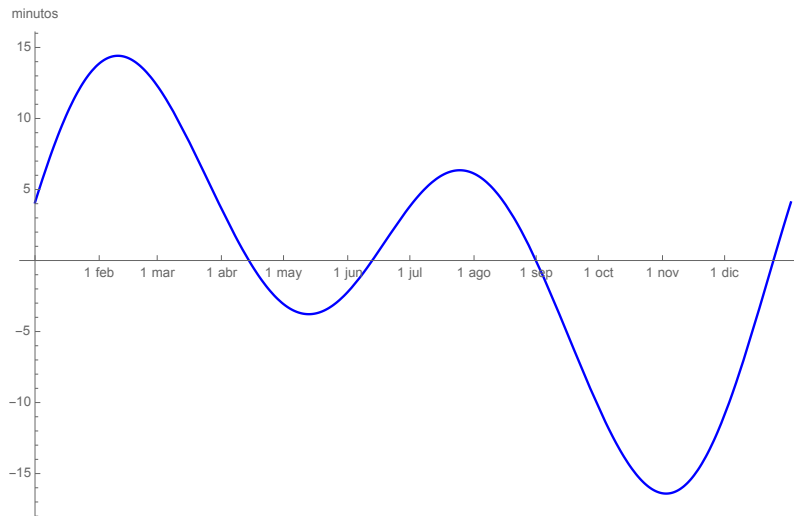


Figura 3.10: Gráfico de la ecuación del tiempo obtenida por desarrollo en serie, según la ecuación (3.26).

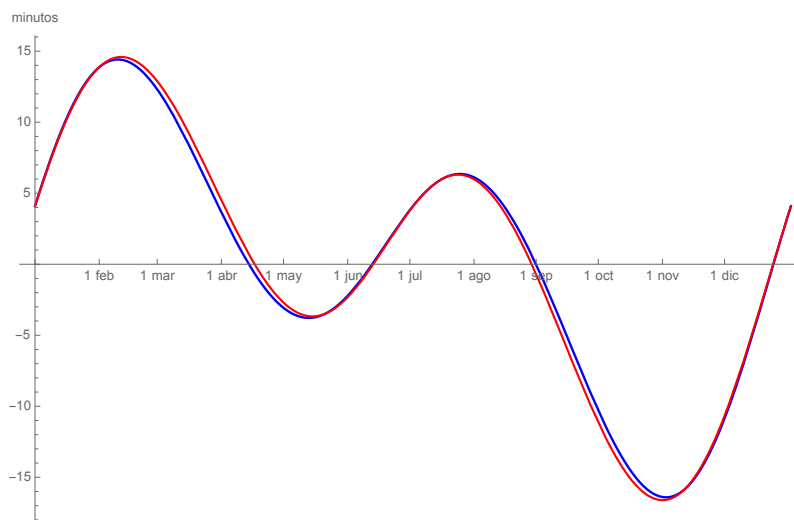


Figura 3.11: La ecuación del tiempo obtenida por desarrollo en serie, en azul, comparada con la ecuación obtenida en la secciones 3.2.1 y 3.2.2 (en rojo).

Si nos centramos solo en las diferencias entre ambas aproximaciones, la Figura

3.12 nos revela que la diferencia máxima entre ambos cálculos es de un minuto, y ésta se produce hacia el 1 de abril y el 1 de octubre.

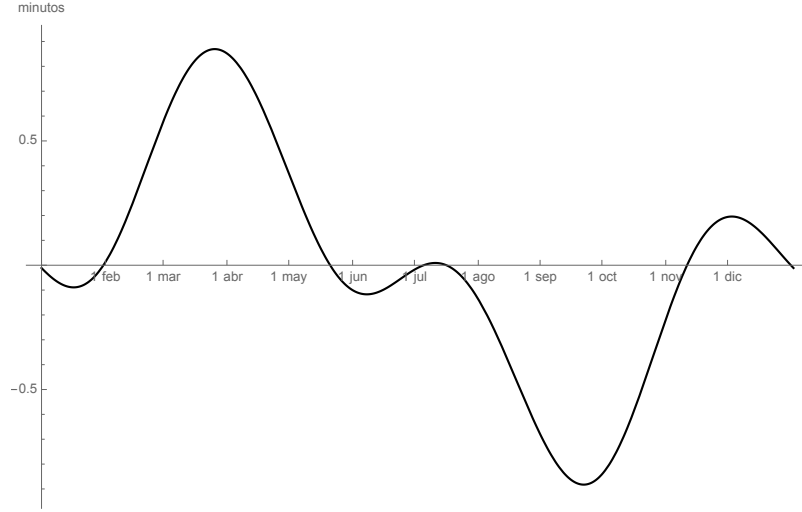


Figura 3.12: Diferencia entre las dos formas de calcular la ecuación del tiempo.

3.4. La ecuación del tiempo y las funciones de Bessel

Por último, destacamos que la ecuación de Kepler resulta una pieza clave para encontrar la ecuación del centro y es una de las ecuaciones más estudiadas de todos los tiempos, por su trascendencia en la determinación de efemérides astronómicas y, en nuestros días, en la determinación de las posiciones de los satélites artificiales. Una de las formas de llegar a resolver la ecuación es a través de las funciones de Bessel. Si escribimos (3.5) como

$$E - M = e \operatorname{sen} E, \quad (3.27)$$

vemos que $E - M$ es una función impar de E y, por lo tanto, de M . En consecuencia, su desarrollo en serie de Fourier será de la forma

$$e \operatorname{sen} E = 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kM,$$

de manera que

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e \operatorname{sen} E \operatorname{sen} kM dM.$$

Integrando por partes, llegamos a

$$b_k = \left[-\frac{1}{k\pi} e \operatorname{sen} E \cos kM + \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kM d(e \operatorname{sen} E) \right]_{E=0}^{\pi} = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kM d(e \operatorname{sen} E).$$

Haciendo uso de la ecuación (3.27) podemos sustituir $e \text{ sen } E$ por $E - M$ y, entonces,

$$b_k = \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos kM dE - \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos kM dM.$$

Puesto que la segunda integral es 0, finalmente queda

$$b_k = \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \cos(kE - ke \text{ sen } E) dE,$$

donde hemos hecho uso, de nuevo, de la ecuación de Kepler para expresar M en términos de E . Ahora bien, de acuerdo con la definición de las funciones de Bessel [4],

$$J_k(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(k\theta - z \text{ sen } \theta) d\theta,$$

por lo que

$$b_k = \frac{1}{k} J_k(ke). \quad (3.28)$$

Por tanto, se tiene que

$$e \text{ sen } E = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \text{ sen } kM$$

y, entonces,

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_k(ke) \text{ sen } kM \quad (3.29)$$

Si e es un pequeño parámetro, como lo es en el caso de la órbita de la Tierra, podemos desarrollar (3.28) como una serie de potencias de e . Si lo hacemos hasta orden tres y tenemos en cuenta que

$$\cos(ku - ke \text{ sen } u) \approx \cos ku + ke \text{ sen } ku \text{ sen } u - \frac{k^2 e^2}{2} \cos ku \text{ sen}^2 u - \frac{k^3 e^3}{6} \text{ sen } ku \text{ sen}^3 u,$$

se obtiene que

$$b_1 = J_1(e) \approx \frac{e}{2} - \frac{e^3}{16}, \quad b_2 = \frac{1}{2} J_2(2e) \approx \frac{e^2}{4}, \quad b_3 = \frac{1}{3} J_3(3e) \approx \frac{3}{16} e^3,$$

que, llevado a (3.29), nos da

$$E \approx M + \left(e - \frac{e^3}{8} \right) \text{ sen } M + \frac{e^2}{2} \text{ sen } 2M + \frac{3}{8} e^3 \text{ sen } 3M,$$

expresión que podemos comparar con (3.19), en donde se daba el desarrollo de E hasta las potencias de orden tres en la excentricidad.

Conclusiones

La realización de esta memoria me ha dado la oportunidad de revisar conceptos básicos de geometría, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales y análisis. También me ha supuesto familiarizarme con algunas de las nociones básicas del movimiento planetario y de astronomía.

En la última parte, el cálculo de la *ecuación del tiempo* me ha proporcionado la oportunidad de utilizar una gran variedad de nociones vistas a lo largo de la carrera, como el teorema de la función implícita, desarrollos en serie de potencias, resolución de ecuaciones diferenciales, etc. También me ha dado una idea de la dificultad de representar fenómenos físicos de forma precisa mediante el uso de las matemáticas.

Bibliografía

- [1] A. Abad, J. A. Docobo, A. Elipe, *Curso de Astronomía*. Prensas Universitarias de Zaragoza. Zaragoza, 2002.
- [2] D. Brouwer, G. M. Clemence, *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press. New York, 1961.
- [3] R. Cid, *Curso de Astronomía*, Universidad de Zaragoza. Zaragoza, 1970.
- [4] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, Inc. San Diego, 1980.
- [5] C. Rousseau, The Equation of Time, *Pi in the sky*, **16**, 4–7, 2012.
- [6] W. M. Smart, *Spherical Astronomy*. Cambridge University Press. Cambridge, 1971.
- [7] D. Snyder, Sundial Design Considerations, *Compendium, Journal of the North American Sundial Society*, **22**, 19–31, 2015.
- [8] A. E. Waugh, *Sundials: Their theory and construction*. Dover Publications, Inc. New York, 1973.