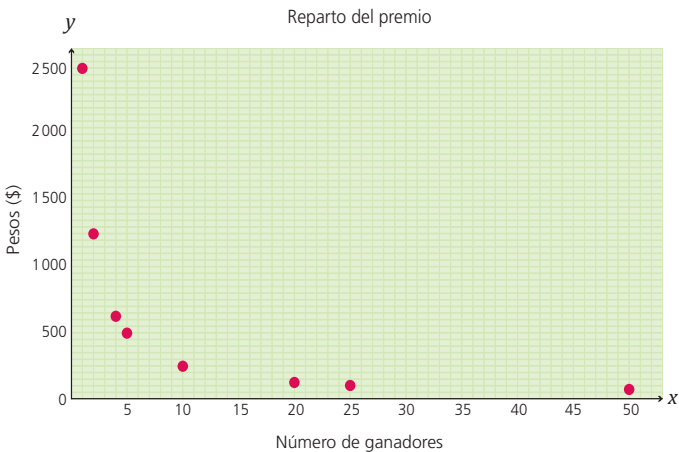


2. Una lotería escolar tiene un premio de \$2 500 y se repartirá en partes iguales entre el número de ganadores, como se observa en la gráfica. Contesten lo que se pide.

- ¿Qué le sucede a la gráfica conforme aumenta el número de ganadores? _____
- ¿Qué pasa con la cantidad a repartir cuando el número de ganadores aumenta al doble? _____ ¿Y cuando el número de ganadores aumenta al triple? _____ ¿Y al cuádruple? _____



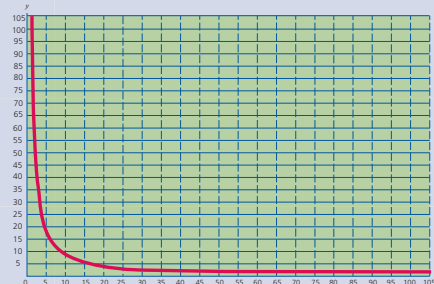
- Unan los puntos de las gráficas con una línea, ¿es una línea recta? _____
- ¿Qué obtienen si se multiplica un valor del eje x con su correspondiente valor del eje y? _____ Prueben con los diferentes valores de la abscisa y la ordenada de los puntos.
- Escriban una expresión algebraica con la que determinen la cantidad de dinero que le toca a cualquier número de ganadores. _____

3. Con apoyo de su maestro, revisen sus respuestas y, en caso necesario, corrijan. Compáren las gráficas y hagan en su cuaderno lo que se indica.

- Describan en qué se parecen y en qué son diferentes.
- ¿Qué valores obtienen si se dividen cualquier valor del eje y, entre su correspondiente eje x?
- Observen en cada gráfica cuál es el valor de y cuando x vale cero. Posteriormente, lean y comenten la siguiente información.

La gráfica que corresponde a una variación inversa, cuando todos los valores involucrados son positivos, es una *hipérbola de una sola rama*.

La expresión algebraica que representa una situación de variación inversamente proporcional es $k = xy$, donde k representa la constante de proporcionalidad, x es diferente de 0 y también $y = \frac{k}{x}$



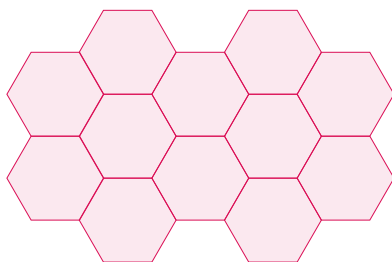
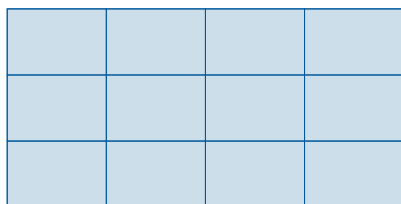
4. Resuelvan los problemas presentados en el recurso informático *Problemas de distintos tipos de variación*, que implican variación lineal, directa e inversa, para que continúen estudiando las características de los diferentes tipos de variación.



22. Polígonos 2

Sesión
1

■ Para empezar



Desde la antigüedad se usan polígonos para recubrir pisos, hacer patrones en telas, tapetes o vitrales. Sin embargo, no todos los polígonos sirven para cubrir completamente las superficies; para lograr esto es necesario tomar en cuenta sus ángulos y algunas de sus propiedades.

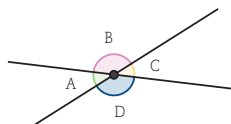
En primer grado estudiaste algunos tipos de ángulos y las relaciones entre ellos; por ejemplo, los **ángulos opuestos** por el vértice y los **ángulos adyacentes**. En esta secuencia estudiarás algunas relaciones entre los ángulos de los polígonos.

Suma de ángulos internos

1. Determina cuánto mide el ángulo faltante en cada polígono sin usar el transportador.

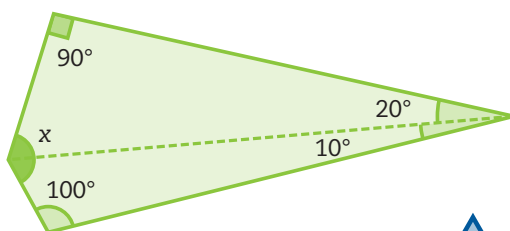
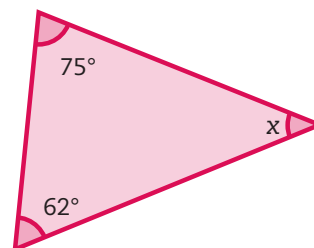
Glosario

Los **ángulos opuestos** por el vértice son los que tienen el mismo vértice, y los lados de uno son prolongación de los lados del otro. Estos ángulos siempre tienen la misma medida. Los **ángulos adyacentes** tienen un lado común y la suma de ambos es 180° .



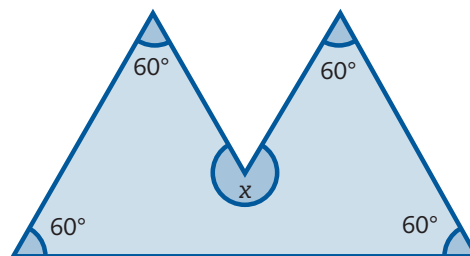
$\angle A$ y $\angle C$ } son opuestos
 $\angle B$ y $\angle D$ } por el vértice
 $\angle B$ y $\angle C$ } son adyacentes
 $\angle A$ y $\angle D$ }

$x =$ _____



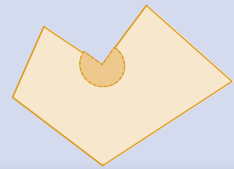
$x =$ _____

$x =$ _____



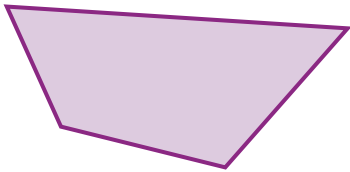
2. En grupo, comparen sus respuestas y describan en su cuaderno qué procedimiento utilizaron para encontrar la medida de los ángulos faltantes. Luego, lean la siguiente información.

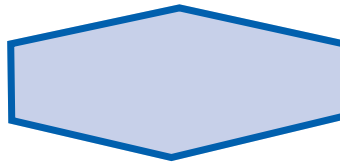
Un *ángulo interno* de un polígono es el que se encuentra delimitado por dos lados consecutivos, es decir, por cada vértice del polígono hay un ángulo interno. Como su nombre lo indica, el ángulo se forma dentro del polígono.



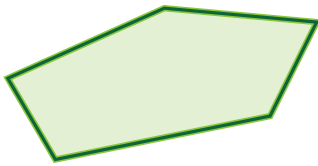
■ Manos a la obra

3. Mide los ángulos internos de los siguientes polígonos con tu transportador, anótalos sobre la figura y calcula su suma. Después, escribe el resultado en las líneas.





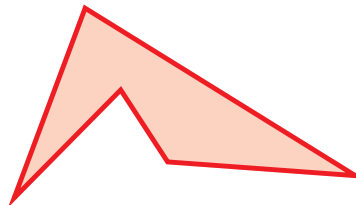


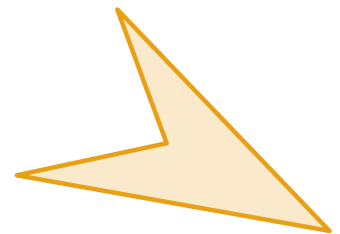






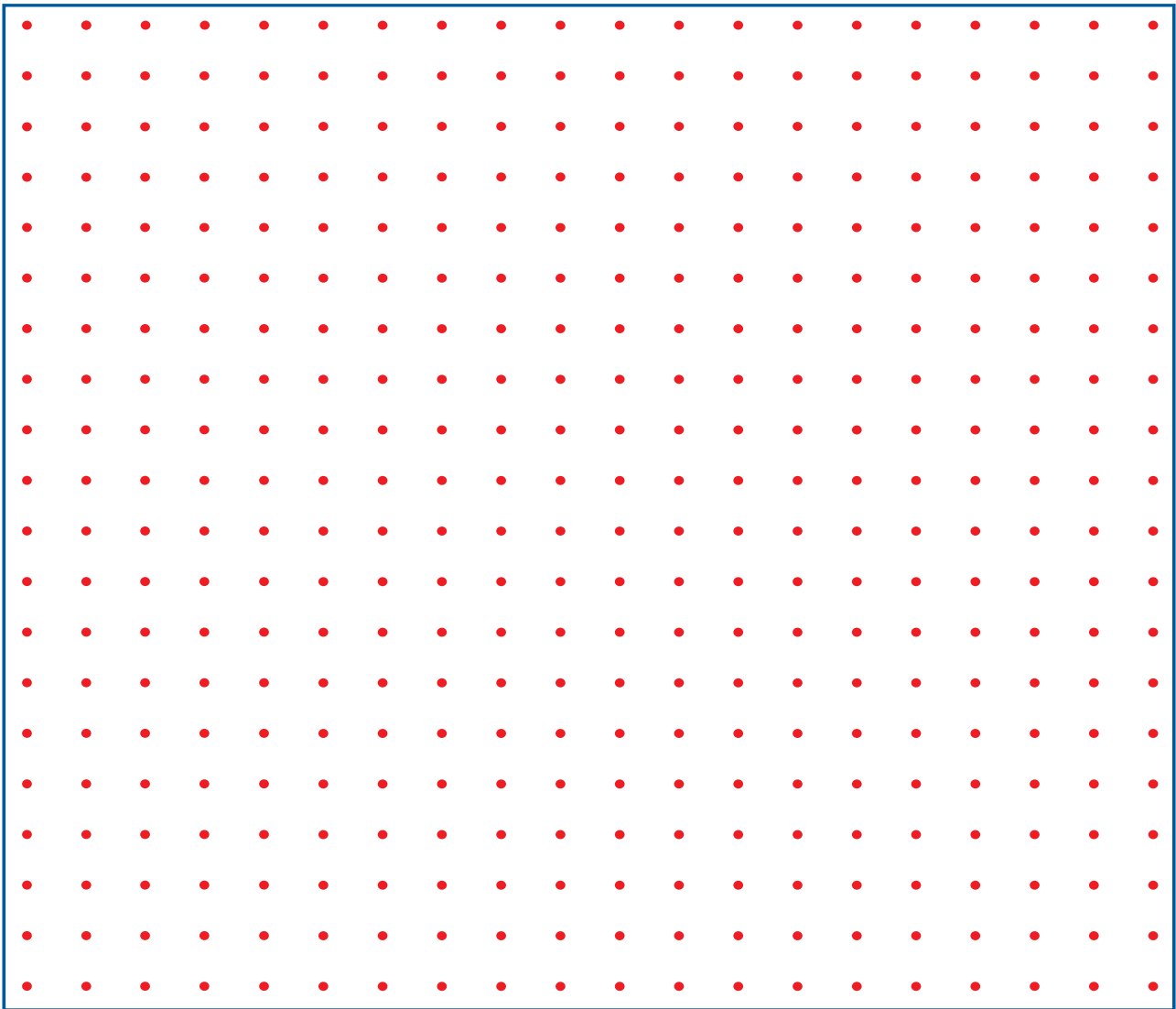








4. En la siguiente retícula traza diferentes polígonos regulares e irregulares de 4, 5 y 6 lados. Luego mide los ángulos internos de cada uno y obtén su suma.



5. Marquen en parejas la opción correcta a partir de sus respuestas anteriores.

Enunciado	Suma de los ángulos internos			
a) La suma de los ángulos internos de un polígono de cuatro lados es:	<input type="checkbox"/> 180°	<input type="checkbox"/> 270°	<input type="checkbox"/> 360°	<input type="checkbox"/> 450°
b) La suma de los ángulos internos de un polígono de cinco lados es:	<input type="checkbox"/> 180°	<input type="checkbox"/> 360°	<input type="checkbox"/> 450°	<input type="checkbox"/> 540°
c) La suma de los ángulos internos de un polígono de seis lados es:	<input type="checkbox"/> 180°	<input type="checkbox"/> 360°	<input type="checkbox"/> 540°	<input type="checkbox"/> 720°
d) La suma de los ángulos internos de un polígono de siete lados es:	<input type="checkbox"/> 360°	<input type="checkbox"/> 540°	<input type="checkbox"/> 720°	<input type="checkbox"/> 900°



- Comparen sus resultados con los de sus compañeros; si fueron diferentes, discutan en qué lo son y corrijan lo que sea necesario. En particular, observen qué sucedió con las respuestas que marcaron en la actividad 5. ¿Pudieron indicar cuál es la suma de los ángulos internos de un polígono de 7 lados?
- A partir de los resultados de las actividades anteriores, lean en grupo la siguiente información.

La suma de los ángulos internos de un polígono cualquiera con n lados es $(n - 2) \times 180^\circ$

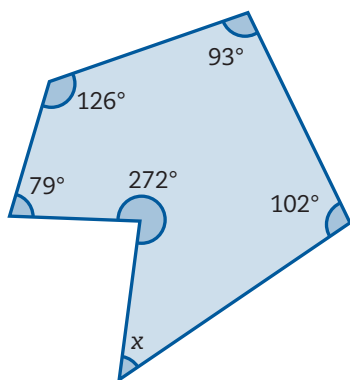
Ángulos internos y externos de un polígono

Sesión
2

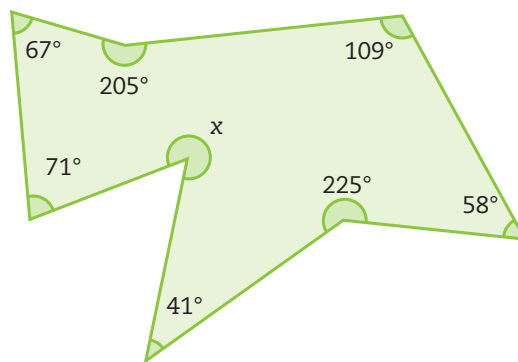
- Calcula la suma de los ángulos internos de los siguientes polígonos utilizando la fórmula establecida en la sesión anterior.

Número de lados del polígono n	8	11	24	2018
Suma de ángulos internos				

- Determina la medida del ángulo faltante en cada polígono sin usar transportador.



$x =$ _____



$x =$ _____

- Encuentra el número de lados del polígono y completa la tabla según corresponda.

Suma de los ángulos internos del polígono	1 080°	17 640°	21 060°
Número de lados del polígono			



4. Comenta con un compañero cómo calcularían la medida de los ángulos internos de un polígono regular con n lados y justifiquen su procedimiento.

a) ¿Cómo son entre sí los ángulos internos de un polígono regular? _____

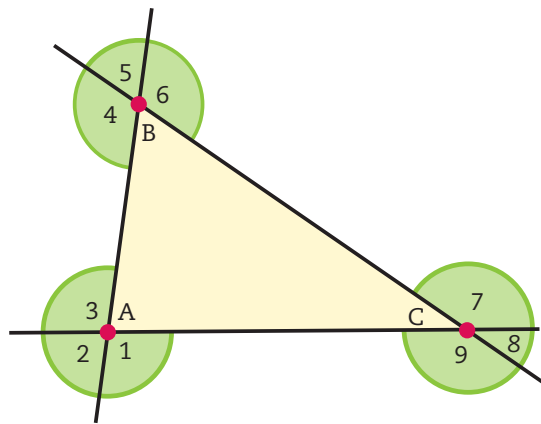
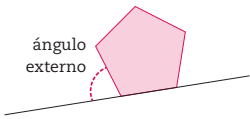
5. En equipo, lean la definición de **ángulo externo** y respondan tomando en cuenta la siguiente figura.

a) De los ángulos marcados, ¿cuáles son ángulos externos del triángulo?

Glosario

El **ángulo externo** de un polígono es el que se forma por uno de sus lados y la prolongación del lado adyacente. Cada ángulo externo es suplementario del ángulo interior que comparte el mismo vértice.

ángulo externo



b) ¿Cuántos ángulos externos del triángulo encontraron? _____

c) ¿Qué relación tienen los ángulos $\angle 4$ y $\angle 6$? _____

¿Y los ángulos $\angle 7$ y $\angle 9$? _____

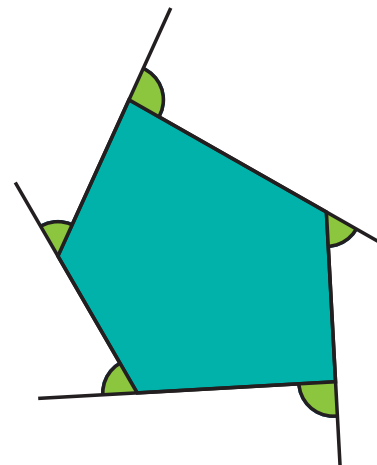
6. Deduzcan cuánto suman las medidas de las siguientes parejas de ángulos adyacentes sin usar transportador. Después, lean la información.

a) $\angle ABC + \angle 4 =$ _____ c) $\angle BCA + \angle 7 =$ _____ e) $\angle CAB + \angle 1 =$ _____

b) $\angle ABC + \angle 6 =$ _____ d) $\angle BCA + \angle 9 =$ _____ f) $\angle CAB + \angle 3 =$ _____

La suma de las medidas de los ángulos interno y externo de un vértice de un polígono es 180° . Es decir, dado un vértice, el ángulo interno y cualquiera de los dos externos son suplementarios.

7. En pareja, hagan lo siguiente en su cuaderno.
- Paso 1. Dibujen un pentágono convexo e irregular en una hoja cuadriculada.
- Paso 2. Tracen un ángulo externo por cada vértice, es decir, prolonguen los lados como en la figura de la derecha.
- Paso 3. Marquen los ángulos externos como en la figura.
- Paso 4. Recorten con tijeras cada uno de los ángulos que marcaron.
- Paso 5. Háganlos coincidir en un punto sin que se traslapen.



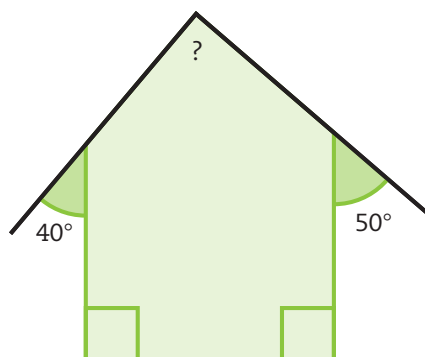
8. Comenten sus resultados y respondan las siguientes preguntas.
- a) ¿Qué observaron? _____

- b) ¿Creen que pasará lo mismo si dibujan un pentágono diferente o si dibujan un polígono con un número de lados diferente? _____
- c) ¿A qué conclusión llegan? _____

9. Con apoyo de su maestro, lean y analicen la siguiente información.

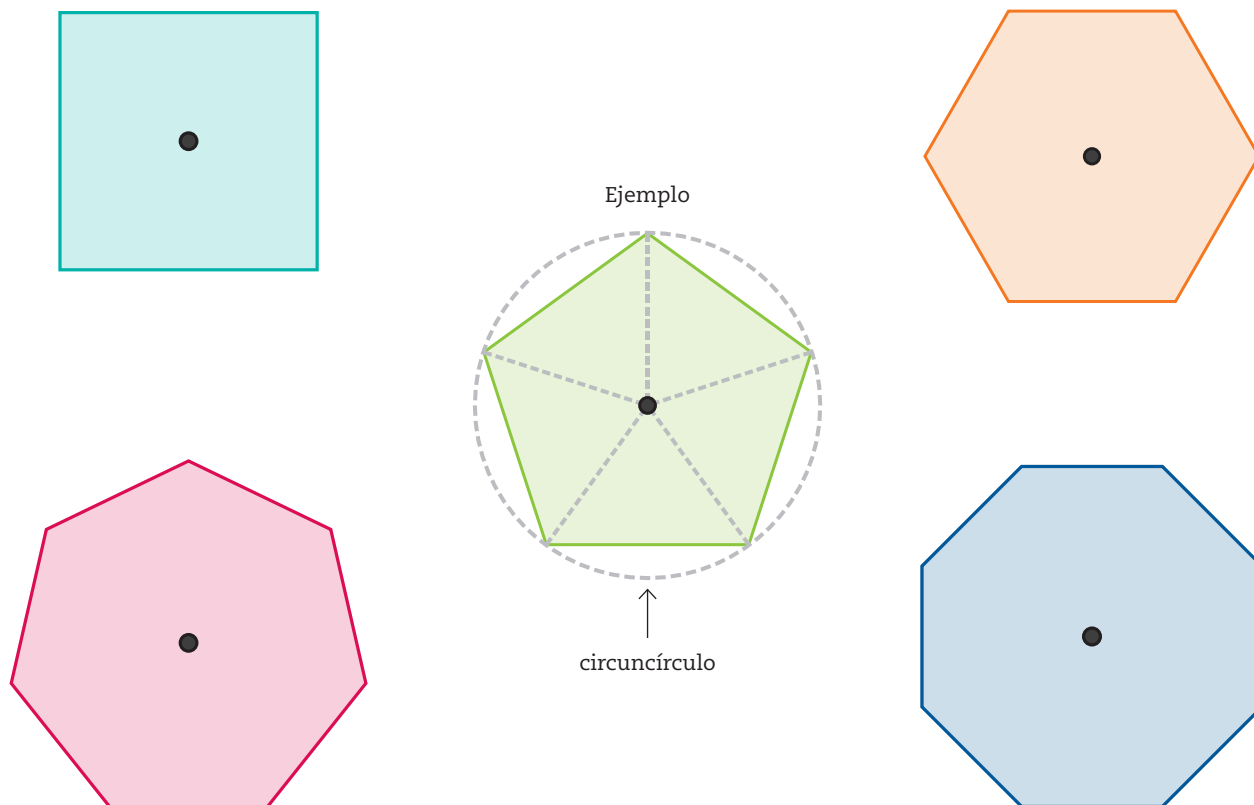
La suma de los ángulos externos de un polígono, uno por cada vértice, es de 360° . No importa cuál de los dos ángulos externos se tome por cada vértice porque miden lo mismo.

10. Observen el recurso audiovisual [Ángulos internos y externos de un polígono](#). Después comenten cuáles son las características y propiedades de estos ángulos.
11. Calculen el ángulo faltante de la figura.



Ángulo central y relaciones entre los demás

1. Traza con el compás el circuncírculo de los siguientes polígonos regulares, es decir, el círculo que pasa por todos los vértices. Revisa el ejemplo. También traza los radios a cada vértice y contesta las preguntas.



- a) Describe qué tipo de triángulos se forman en cada polígono y qué relación hay entre ellos. _____
 - b) Compara tus respuestas con las de un compañero. ¿Son iguales? _____
Si no lo son, comenten en qué son diferentes y argumenten sus respuestas.
2. En grupo y con ayuda de su maestro, lean la siguiente información.

Los polígonos regulares tienen una circunferencia circunscrita, es decir, una circunferencia que pasa por cada uno de sus vértices. El **ángulo central** del polígono regular se forma con los radios que unen el centro del polígono con dos vértices consecutivos.

3. Completen la tabla sin usar transportador y contesten las preguntas.



Número de lados	3	4	5	6	7	n
Nombre del polígono regular						
Medida del ángulo central						
Medida del ángulo interno						
Medida del ángulo externo						

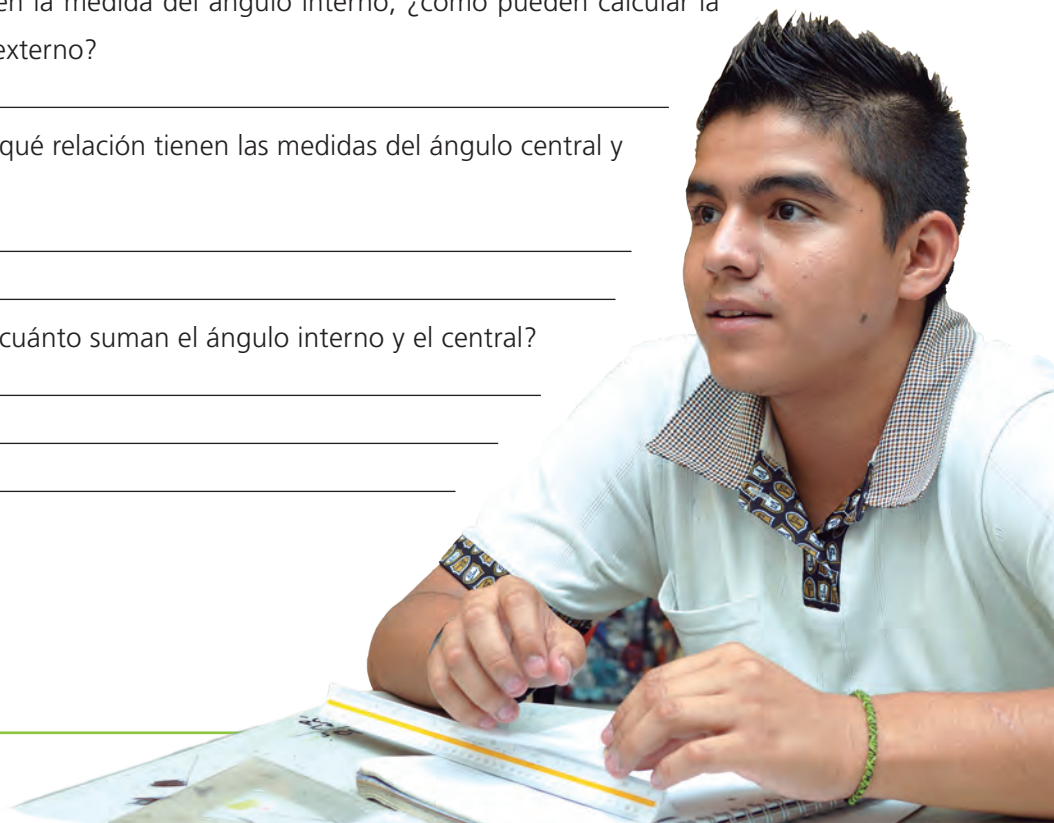
a) ¿De qué manera pueden calcular la medida del ángulo central de cada polígono regular sin usar transportador? _____

b) ¿De qué manera pueden calcular la medida del ángulo interno de cada polígono?

c) Una vez que conocen la medida del ángulo interno, ¿cómo pueden calcular la medida del ángulo externo?

d) En cada polígono, ¿qué relación tienen las medidas del ángulo central y el externo?

e) En cada polígono, ¿cuánto suman el ángulo interno y el central?



4. Con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

En un polígono regular con n lados, la medida del ángulo central es: $\frac{360^\circ}{n}$

En un polígono regular, las medidas de los ángulos central y externo coinciden. Y los ángulos central e interno son suplementarios, es decir, suman 180° .



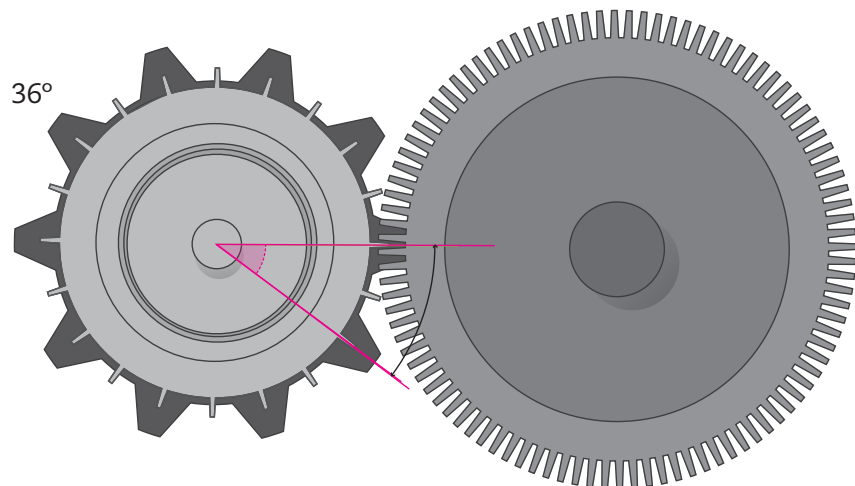
5. Observen el recurso audiovisual *Ángulos centrales de un polígono regular*. Presten atención a los elementos que lo forman y cómo calcular su medida.

■ Para terminar

Problemas sobre ángulos de polígonos



1. Trabajen en pareja. Resuelvan las siguientes preguntas sobre engranes.



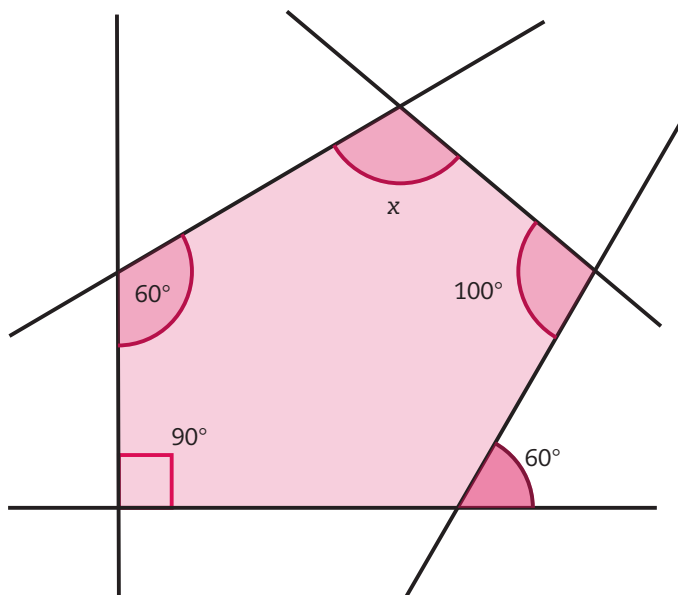
- a) ¿Cuántos grados tiene que girar un engrane de 20 dientes para que cada diente se mueva una posición de su lugar? _____
- b) Si el engrane tuviera 100 dientes, ¿cuántos grados tendría que girar? _____
- c) Se tienen dos engranes como en la figura, uno de 100 dientes y otro de 20. Si el pequeño da una vuelta, ¿cuántos grados gira el grande? _____
- d) Y si el grande da una vuelta, ¿cuántos grados girará el pequeño? _____
¿Cuántas vueltas completas dará? _____

2. Respondan las siguientes preguntas sobre pistas de carreras.



- a) Observen la pista de carreras de automóviles con forma hexagonal. Midan los ángulos con transportador y contesten: ¿cuál es el mayor ángulo de giro que tendría que dar un automóvil que recorre la pista? _____
- b) ¿Es posible hacer una pista hexagonal diferente donde los giros sean, a lo más de 60° ? _____ ¿Por qué? _____
- c) Se quiere diseñar una pista de carreras poligonal donde los automóviles giren en cada esquina hacia el mismo lado y en un ángulo no mayor a 20° , ¿cuál es el mínimo número de lados que puede tener la pista? _____

3. Calculen el ángulo faltante de la siguiente figura.



23. Conversión de medidas 2

Sesión

1



■ Para empezar

La talla y el peso de los bebés pueden ser indicadores de su estado de salud. Por eso es importante que desde su nacimiento se realicen estas mediciones. La mayoría de los bebés que nacen entre las semanas 37 y 40 de gestación, y están sanos, pesan entre 2.6 y 4 kg. La alimentación que recibe el bebé también es importante para su desarrollo. Generalmente, los bebés que se alimentan con leche de fórmula consumen entre 3 y 4 onzas cada tres horas.

¿De cuántos gramos es la diferencia que hay entre el peso mínimo y el máximo que tiene un bebé sano al nacer? ¿Cuántos mililitros de leche toma un bebé recién nacido al día? En esta secuencia trabajarás con equivalencias entre unidades de peso del Sistema Internacional y del Sistema Inglés, así como con las unidades de capacidad, para contestar preguntas como las anteriores.

■ Manos a la obra

Peso y alimentación

1. Trabaja individualmente. Marca con una palomita (✓) la unidad de medida que consideres adecuada para cada caso. En tu cuaderno justifica tu elección.

a) El peso aproximado de un colibrí es de:

- 0.0120 toneladas 0.120 kilogramos 12 gramos 1 200 miligramos

b) El peso aproximado de un elefante es de:

- 5 toneladas 500 kilogramos 50 000 gramos 500 hectogramos

c) El peso aproximado del libro de Matemáticas 2 de Telesecundaria es de:

- 450 decigramos 0.450 kilogramos 450 gramos 4 500 miligramos

d) La **dosis** de un medicamento en cápsula es de:

- 20 decigramos 0.200 kilogramos 2 000 gramos 2 miligramos

2. En grupo y con ayuda de su maestro, comenten y argumenten sus respuestas.

3. Trabajen en pareja para resolver lo que se indica.

Glosario

Dosis: cantidad de medicamento que se debe administrar para producir el efecto deseado.

Monserrat tiene un bebé de cuatro meses de edad. En la siguiente tarjeta de salud se presenta el registro del peso mensual del bebé a partir de su nacimiento. Si en la revisión de agosto se observó que el peso aumentó 500 gramos respecto a julio, ¿cuál es su peso en ese momento? Completen la tabla.

Fecha	Peso en kilogramos	Peso en gramos
1/abr/2019		3 120
2/may/2019	3.8	
1/jun/2019		4 706
3/jul/2019	5.159	
2/ago/2019		



Dato interesante

La *masa* es la cantidad de materia que contiene un cuerpo y no varía; la unidad básica para medirla es el **kilogramo**. El peso es la acción que ejerce la fuerza de gravedad sobre cualquier objeto.

Una persona no pesa lo mismo en la Tierra que en la Luna, pero su masa será la misma en ambos lugares. Sin embargo, comúnmente se habla del peso de los cuerpos, cuando lo correcto sería decir la *masa de los cuerpos*.

- a) ¿Cuánto aumentó de peso el bebé en su primer mes?

- b) ¿En qué mes aumentó más de peso? _____ ¿Cuánto aumentó? _____
- c) En la revisión hay otras dos bebés, una pesa 3.3 kg, y la otra, 3 kilogramos con 200 gramos. ¿Quién pesa más? _____

4. ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Márcalas con una palomita (✓).

1 g = 0.001 kg

1 g = 0.01 kg

1 g = $\frac{1}{100}$ kg

1 g = $\frac{1}{1000}$ kg

5. En grupo, revisen sus respuestas y, con apoyo de su maestro, analicen la siguiente información para determinar si es correcto lo que hicieron. Recuerden que el kilogramo es la unidad básica de masa en el Sistema Internacional de Unidades (SI) y su símbolo es **kg**.

Tonelada métrica	Quintal métrico	Kilo-gramo	Hecto-gramo	Deca-gramo	Gramo	Deci-gramo	Centi-gramo	Mili-gramo
T	Q	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1 000 kg	100 kg	1 000 g	100 g	10 g	1 g	0.1 g	0.01 g	0.001 g

a) Completen la siguiente tabla:

Kilogramos	5	2.5			7.5
Miligramos	5 000 000		50 000	500	

b) Expresen en gramos cada una de las siguientes cantidades.

1.5 kg = _____

1 450 cg = _____

$3\frac{1}{4}$ kg = _____

$\frac{20}{100}$ kg = _____



- c) Expresen en su cuaderno, de manera general, cómo convierten una cantidad de una unidad menor a una mayor y viceversa.

Sesión
2

Cuidados maternos

Date	Weight (lb)	Peso (kg)
04/01/2019	6.88	3.120
05/02/2019		
06/01/2019		
07/03/2019		5.159
	12.48	

Unidad del Sistema Inglés	Libra
Símbolo	lb
Equivalencia con el Sistema Internacional	1 lb = 453.6 g

Unidad del Sistema Inglés	Onza
Símbolo	oz
Equivalencia	1 oz = 0.0625 lb 1 lb = 16 oz
Equivalencia con el Sistema Internacional	1 oz = 28.35 g



1. Formen equipos para trabajar la siguiente actividad. Monserrat y su bebé van a vivir a Estados Unidos de América y en la primera revisión del bebé en ese país le solicitaron que llenara la tarjeta de salud que usan allá. Ayúdenla a completarla a partir de la tarjeta que ya tenía, considerando la información del recuadro.

El médico sugirió a Montserrat que diera a su bebé diariamente 6 tomas de 4 oz de leche en polvo cada una.

- a) ¿Cuánta leche de fórmula toma al día el bebé?

- b) Los papás de Montserrat le enviaron de México 10 botes de leche como el que se observa en la imagen, ¿para cuántas tomas le alcanzará? _____



2. Comparen sus respuestas con el resto del grupo y comenten sus estrategias de cálculo.

3. Anoten en su cuaderno, para cada cantidad, un objeto que pueda tener la medida que se indica en cada inciso.

- a) 1 kg c) 7.5 g e) 1 lb g) 110 lb
b) 50 mg d) $\frac{1}{4}$ kg f) 1 oz h) 5 oz

4. Observen el recurso audiovisual [Unidades de masa \(peso\) en el Sistema Inglés](#), para que conozcan más acerca de cómo surgen estas unidades de medida.

5. Trabaja individualmente. Marca con una palomita (✓) la unidad de medida que consideres adecuada en cada caso. Explica tu elección.

- a) La cantidad de sangre promedio que tiene una mujer en el cuerpo.

42.5 litros 42.5 decalitros 42.5 mililitros 42.5 decilitros

- b) El agua que le cabe a un tinaco.

45 kilolitros 45 hectolitros 45 litros 45 decilitros



c) La capacidad de una botella de agua.

0.1 decalitro 0.1 litro 0.1 hectolitro 0.1 decilitro

d) La cantidad de café que cabe en una taza.

250 decalitros 250 litros 250 hectolitros 250 mililitros

6. En grupo, y con apoyo de su maestro, comenten y argumenten sus respuestas.

7. Resuelvan en pareja las siguientes actividades.

a) En un vaso, ¿entrará más o menos que medio litro de agua? _____

¿Y que 200 ml? _____ Justifiquen sus respuestas. _____

b) Para hacer 4 pizzas se usa 1 litro de agua, ¿será cierto que para cada pizza se necesitan 250 mililitros de agua? _____ ¿Por qué? _____

c) Si en una botella hay un litro de agua, ¿cuántos goteros de 10 ml se podrían llenar? _____ ¿Y de 1 decilitro? _____

8. En grupo, revisen sus respuestas a las actividades anteriores y, con el apoyo de su maestro, analicen y apliquen la siguiente información.

El litro es la unidad básica de capacidad (volumen de un líquido) en el Sistema Internacional de Unidades (SI). Su símbolo es **l** o **L**, y de él se obtienen múltiplos o submúltiplos.

Múltiplos			Base	Submúltiplos		
Kilolitro	Hectolitro	Decalitro	Litro	Decilitro	Centilitro	Mililitro
kl	hl	dal	L o l	dl	cl	ml
1 000 l	100 l	10 l	1 L	0.1 l	0.01 l	0.001 l

Mayores que el litro
Menores que el litro

a) ¿Cuáles de estas igualdades son verdaderas? Márquenlas con una palomita (✓).

1 ml = 0.001 litro 1 ml = 0.01 litro 1 ml = $\frac{1}{100}$ litro 1 ml = $\frac{1}{1000}$ litro

9. Completen las siguientes tablas:

Litro	3	9		0.50		$\frac{3}{4}$
Mililitro	3 000		6 000		1 500	

Dato interesante

La onza es una unidad inglesa que se usa tanto para capacidad (volumen) como para peso. Para diferenciarlas, la onza para medir líquidos se llama onza fluida; sin embargo, si el contexto permite establecer esa diferencia, se puede usar sólo la palabra "onza".

Litro	3	9	1 500	$\frac{3}{4}$	
Hectolitro			6 000		0.75

10. Comparen sus respuestas con el resto del grupo y comenten sus estrategias de cálculo.

■ Para terminar

Alimentación y material de construcción

Unidad del Sistema Inglés	Onza
Símbolo	oz
Equivalencia	1 fl oz = 0.0078125 gl
Equivalencia con el Sistema Internacional	1 fl oz = 0.0295 L = 29.5 ml

1. Trabajen en pareja. En la preparación de la alimentación del bebé de Monserrat, cada onza de leche en polvo se disuelve en una onza de agua. Respondan en su cuaderno.

- Si el bebé toma 4 onzas de leche en cada biberón, ¿qué cantidad de agua en mililitros consume?
- Montserrat compra garrafones de 5 galones de agua. ¿Cuántas tomas de leche se pueden preparar con esa cantidad de agua?
- Montserrat tiene biberones de dos tamaños diferentes: uno de 5 fl oz y otro de 240 ml. ¿A cuál de los dos biberones le cabe más agua?

Unidad del Sistema Inglés	Galón
Símbolo	gl
Equivalencia	1 oz = 0.0625 lb 1 lb = 16 oz
Equivalencia con el Sistema Internacional	1 galón = 3.7851 L

2. Completen las siguientes tablas:

Litros	24		$\frac{2}{3}$		
Galones		24		0.5	100

Onzas	50			$1\frac{1}{2}$	3.25
Litros		5	$\frac{3}{4}$		

3. Comenten y argumenten sus respuestas con su maestro y sus compañeros. Luego, resuelvan la siguiente actividad.

María es pediatra y sabe que, para un niño de 9 años, la dosis de un medicamento es de 15 ml al día por cada 10 kg de peso, que se debe repartir en tres tomas iguales.

- ¿Qué cantidad de jarabe le debe indicar en cada toma a Alonso, que tiene 9 años y pesa 42 kg? _____



4. Anoten en su cuaderno un objeto que pueda tener la capacidad que se indica en cada inciso.

- a) 10 litros c) $\frac{3}{4}$ litro e) 1.5 oz g) 10 oz
b) 500 mililitros d) 5 mililitros f) 2 gl h) $\frac{1}{2}$ gl

5. En grupo, y con apoyo de su maestro, comenten y argumenten sus respuestas.

6. Observen el recurso audiovisual *El volumen de los líquidos en el Sistema Inglés* para que conozcan más acerca de cómo surgen estas unidades de medida.

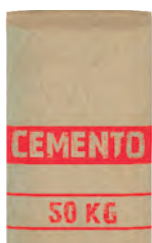


7. Trabaja individualmente.



a) Leonardo construye una casa y compró dos toneladas y media de varilla de $\frac{3}{8}$ ".

- Si cada tonelada tiene 150 varillas, ¿cuál es el peso de cada varilla _____
- Para construir una habitación de 4 m × 4 m se requieren 82 piezas de varilla. ¿Para cuántas habitaciones de ese tamaño alcanzan las dos toneladas y media que compró? _____



b) Compró 35 bultos de cemento para construir el piso (echar el firme) de una habitación de 4 m × 5 m. Un ingeniero le dijo que calculara dos bultos por cada 1.5 m². ¿Cuánto cemento sobrará o faltará? _____

- ¿Puede transportar los 35 bultos de cemento en una camioneta de dos toneladas de carga? _____ ¿Por qué? _____
- En un balde entran 5 kg de cemento, ¿cuántos baldes de 500 g se pueden llenar? _____
- Compró dos galones de pintura para pintar una superficie de 72 m². Si el rendimiento de la pintura es de 9 m² por cada litro, ¿sobra o falta pintura? _____ ¿Cuánta? _____ ¿Para cuántos metros cuadrados alcanza la pintura que compró? _____
- Compró una cubeta de 5 gl de impermeabilizante para el techo de una habitación de 4 m × 5 m. Con dos pasadas, cada litro rinde un metro cuadrado. ¿Alcanza la cubeta para impermeabilizar la habitación? Justifica tu respuesta. _____
- Para dar un acabado texturizado en algunas paredes compró una cubeta como la que se observa en la imagen. Le dijeron que con un litro cubría 1 m². Si la superficie de las paredes que recubrirá es de 135 m², ¿cuántas cubetas de éstas necesita? Justifica tu respuesta. _____



Dato interesante

En el Sistema Inglés de medidas existen algunas diferencias. Por ejemplo, el galón británico, llamado también galón imperial, es mayor que el galón estadounidense y equivale a 4.546 litros. El galón estadounidense se usa con mayor frecuencia en productos químicos, pinturas y solventes, incluso en productos de limpieza.

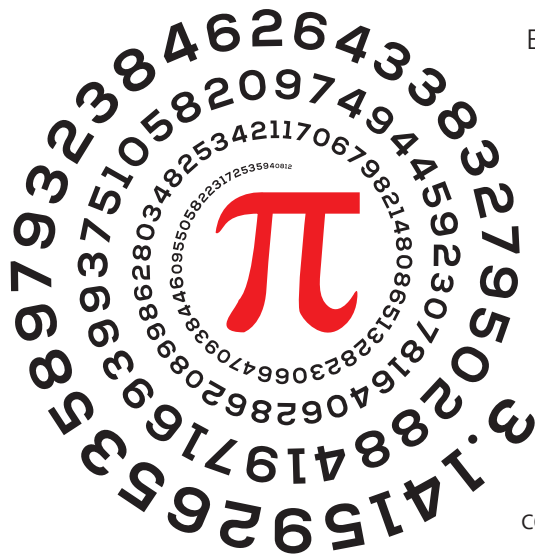
8. Compara tus respuestas con otros equipos y comenten sus estrategias de solución.



24. Área del círculo

Sesión
1

■ Para empezar



En primaria estudiaste que para calcular el perímetro de un círculo se usa un número especial llamado *Pi*, cuyo símbolo es la letra griega π y tiene un valor aproximado de 3.14. Este número indica cuántas veces cabe el diámetro de un círculo en su circunferencia; por eso, para calcular el perímetro del círculo se utiliza la fórmula: $P = \pi \cdot \text{diámetro}$, o lo que es lo mismo, $P = 2 \cdot \pi \cdot \text{radio}$.

¿Por qué estas fórmulas son equivalentes? ¿Sabes cómo se calcula el área de un círculo? ¿Será necesario hacer uso siempre de π ? En esta secuencia lo descubrirás.

■ Manos a la obra

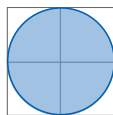
Dato interesante

Es imposible conocer el valor exacto de π . Para cuestiones prácticas se usa 3.14, pero en realidad la parte decimal es infinita y sin periodo, como lo puedes ver en la imagen de inicio.



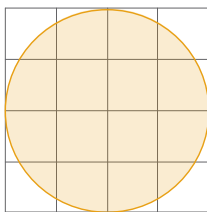
Contando cuadritos

1. Trabajen en pareja. Completen los datos que se piden; consideren el lado de cada cuadrito como la unidad de longitud (u), por lo tanto, cada cuadrito mide 1 unidad cuadrada (u^2).



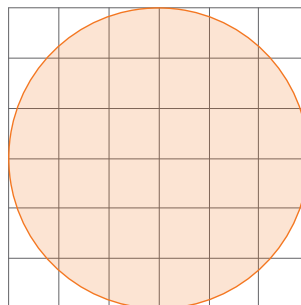
Radio del círculo = _____

Área aproximada del círculo = _____



Radio del círculo = _____

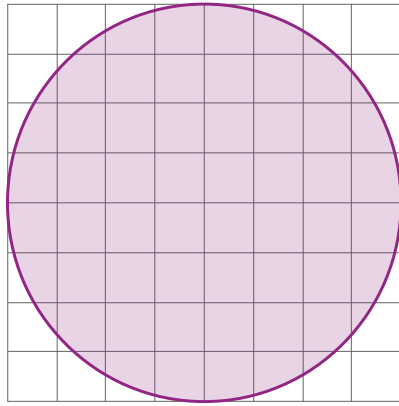
Área aproximada del círculo = _____



Radio del círculo = _____

Área aproximada del círculo = _____

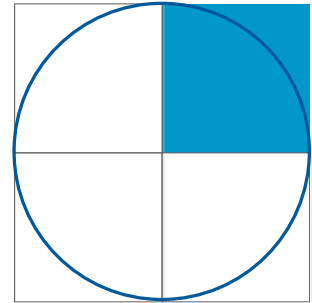




Radio del círculo = _____

Área aproximada del círculo = _____

2. La parte azul de la siguiente figura corresponde al cuadrado que se forma sobre un radio del círculo. Analicen sus resultados de la actividad 1 y observen esta figura; con base en su análisis, subrayen la afirmación que completa el enunciado.



El área del círculo está entre:

- 2 y 3 veces el cuadrado del radio.
- 3 y 4 veces el cuadrado del radio.
- 4 y 5 veces el cuadrado del radio.

3. A partir de sus respuestas, marquen con una palomita (✓) la opción que consideren correcta según la medida del radio indicado. Pueden usar calculadora.

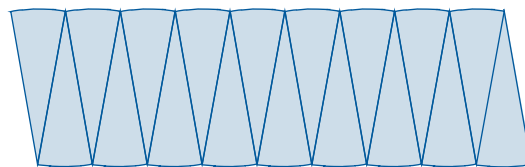
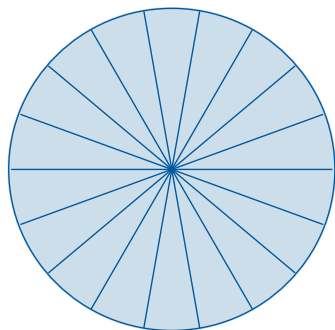
Radio (cm)	El área del círculo (cm ²) está entre:			
5	<input type="checkbox"/> 25 y 50	<input type="checkbox"/> 50 y 75	<input type="checkbox"/> 75 y 100	<input type="checkbox"/> 100 y 125
8	<input type="checkbox"/> 128 y 192	<input type="checkbox"/> 192 y 256	<input type="checkbox"/> 256 y 320	<input type="checkbox"/> 320 y 384
10	<input type="checkbox"/> 50 y 100	<input type="checkbox"/> 100 y 200	<input type="checkbox"/> 200 y 300	<input type="checkbox"/> 300 y 400
15	<input type="checkbox"/> 675 y 900	<input type="checkbox"/> 900 y 1125	<input type="checkbox"/> 1 125 y 1 350	<input type="checkbox"/> 1 350 y 1 575

4. Comparen sus resultados con sus compañeros; si son diferentes, verifiquen por qué lo son y corrijan lo necesario. En particular, argumenten la respuesta que subrayaron en la actividad 2.



¿Y cuál es la fórmula?

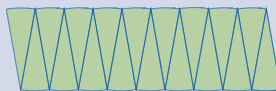
- Trabajen en pareja. Tracen en una hoja una circunferencia de 6 cm de radio. Divídanla en 18 partes como se muestra en la figura de la izquierda. Recorten cada una de las partes y acomódenlas formando la figura de la derecha.



Observen que la figura formada se parece a un romboide. Calculen el área de esa figura considerándola un "romboide"; para ello respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cuál es la fórmula para calcular el área del romboide? _____
 - Observen que la altura del "romboide" es aproximadamente igual al radio del círculo. ¿Cuánto mide? _____
 - Observen que la base del "romboide" es la mitad del perímetro del círculo. ¿Cuánto mide la mitad del perímetro del círculo? _____
 - ¿Cuál es el área del "romboide"? _____
 - ¿Y la del círculo? _____
- Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Después, lean y comenten la siguiente información.

Si pudiéramos dividir un círculo en más partes y formar una figura como la siguiente:



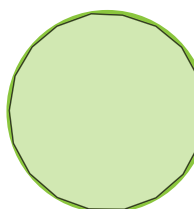
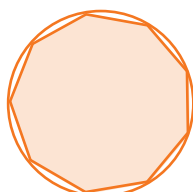
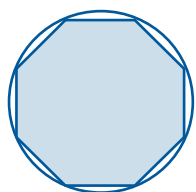
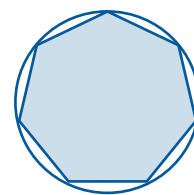
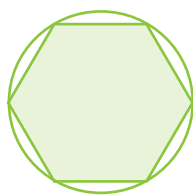
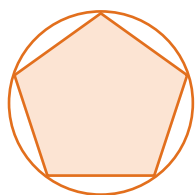
Observaríamos que cada vez se parece más a un romboide cuya área es:

$$A = \text{base} \times \text{altura}$$

Como la base del romboide es la mitad del perímetro del círculo, entonces: $\frac{P}{2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2} = \pi \cdot r$ y la altura del romboide corresponde al radio del círculo; por lo tanto, el área del círculo es:

$$A = \pi \cdot r \cdot r, \text{ o bien, } A = \pi \cdot r^2$$

3. Analicemos otra manera de encontrar la fórmula para calcular el área del círculo. Reúnanse nuevamente en parejas y consideren los siguientes polígonos regulares.



Observen que entre más lados tiene un polígono regular, más se asemeja a un círculo.

- ¿Cuál es la fórmula para calcular el área de un polígono regular? _____
 - ¿Cómo se calcula el perímetro de un círculo? _____
 - ¿A qué medida del círculo se aproxima la apotema del polígono regular entre más lados tenga? _____
 - Si sustituyen sus respuestas de los incisos b) y c) en la fórmula para calcular el área de un polígono regular, ¿qué obtienen? _____
4. En grupo, comenten sus respuestas y corrijan lo necesario. Luego, con ayuda de su maestro lean la siguiente información.

El área de un polígono regular se calcula con la fórmula: $A = \frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2}$

Si consideramos el círculo como un polígono regular de un número infinito de lados, podemos aplicar esta fórmula al círculo. Con lo que obtenemos:

$$A = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r \cdot r, \text{ o bien, } A = \pi \cdot r^2$$

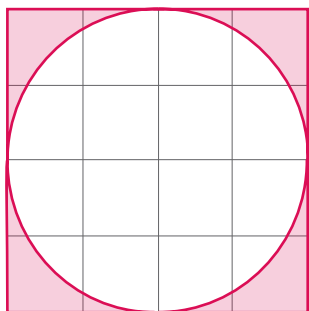
5. Utilicen el recurso informático *Cálculo del área del círculo según Arquímedes*, donde analizarán algunas maneras de determinar la fórmula para calcular el área de un círculo. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/1m_b04_t06_s01-JS/index.html



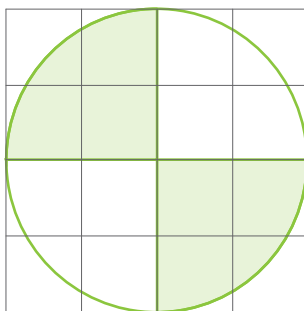
■ Para terminar

Las partes coloreadas

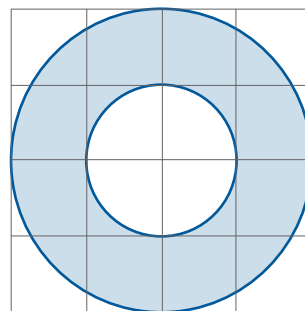
1. Calcula el área de cada parte coloreada. Considera un cuadrado como u^2 .



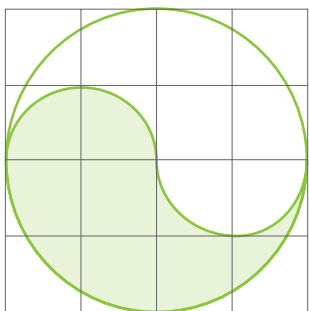
Área = _____



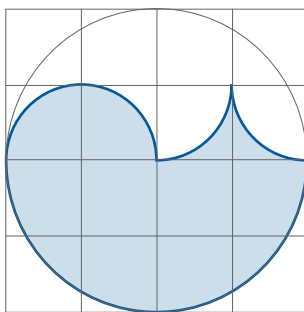
Área = _____



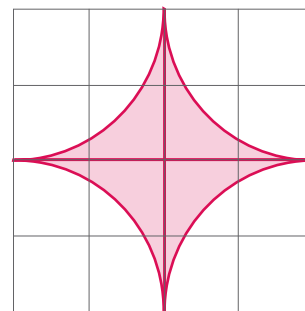
Área = _____



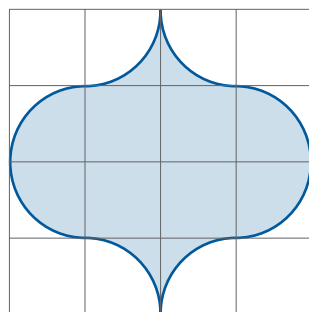
Área = _____



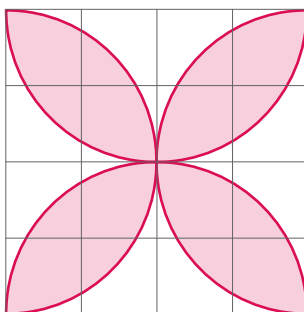
Área = _____



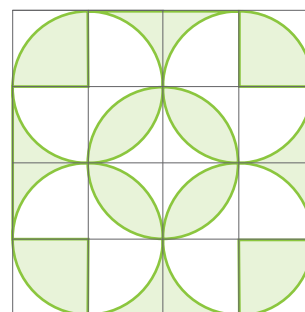
Área = _____



Área = _____



Área = _____



Área = _____

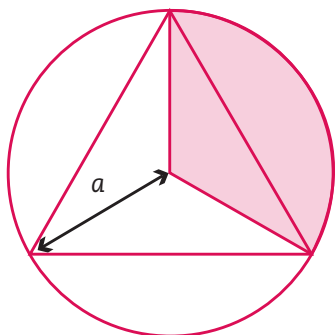
2. Resuelve los siguientes problemas.

- ¿Cuál es el área de un círculo cuyo diámetro mide 10 m? _____
- El área de un círculo es 12.56 cm^2 , ¿cuánto mide su radio? _____
- El perímetro de un círculo es 6.28 cm, ¿cuál es su área? _____
- Una glorieta mide 10 m de radio y tiene en su centro una fuente circular de 3 m de radio.

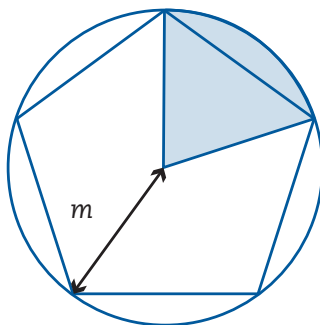
- La base de la fuente se va a cubrir con mosaico, ¿cuál es el mínimo de metros de mosaico que deben comprarse? _____
- La parte de la glorieta que no queda cubierta con la fuente se va a cubrir con pasto en rollo, ¿cuántos metros cuadrados de pasto deben comprarse? _____



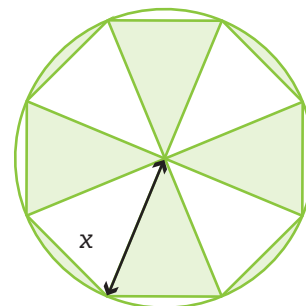
- Los polígonos de las siguientes imágenes son regulares. Anota la expresión que corresponde al área de la parte de color.



Área = _____



Área = _____



Área = _____

- Observen el recurso audiovisual [El área del círculo](#) y comenten los procedimientos para calcular el área del círculo que permiten resolver problemas relacionados con este tema.



25. Medidas de tendencia central y de dispersión 1

Sesión
1

■ Para empezar



¿En alguna ocasión te ha tocado participar en un estudio, encuesta o conteo estadístico? Tal vez no lo has hecho, pero quizá los conoces o has utilizado sus resultados.

Por ejemplo, en la página electrónica del Instituto Nacio-

nal de Estadística y Geografía (Inegi) se puede consultar el portal *Cuéntame*, donde se encuentran los resultados de diversas encuestas, como la Encuesta Nacional de Vivienda (ENVI), la Encuesta Nacional sobre el Uso del Tiempo (ENUT), la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo (ENOE) o la Encuesta de Cohesión Social para la Prevención de la Violencia y la Delincuencia (Ecopred), entre muchas otras.

En esta secuencia emplearás algunos de esos resultados para continuar estudiando las medidas de tendencia central y dispersión. Particularmente, aprenderás qué es la desviación media y cómo se obtiene.



Dato interesante

Los grados de escolaridad nos permiten conocer el nivel de educación de una población determinada.

Grado de escolaridad

1. Lean en pareja la siguiente situación y respondan lo que se les pide.
Emma consulta el portal *Cuéntame* y encuentra esta información:

En México, los habitantes de 15 años y más tienen 9.1 grados de escolaridad en promedio, lo que significa un poco más de la secundaria concluida.

Inegi, "Encuesta intercensal", 2015.

Al leer esto, a Emma le surge el interés por averiguar en su comunidad:

- ¿Cuál es el grado de escolaridad más frecuente?
- ¿Cuál es el grado promedio de escolaridad (media aritmética)?
- ¿Cuál es el grado máximo y mínimo de escolaridad?



a) ¿De qué manera creen que Emma podría obtener información para dar respuesta a sus inquietudes? _____

2. Por su parte, Joel realizó una encuesta a las primeras 30 personas que encontró y que aceptaron responderla. Los resultados que registró son los siguientes:

7	9	22	14	20
3	1	4	19	5
10	5	11	4	8
18	12	9	16	13
11	10	8	13	21
13	18	2	15	22

a) Con base en la información anterior, contesten.

¿Cuál es el grado de escolaridad más frecuente (**Mo**)?

¿Cuál es el grado de escolaridad promedio (media aritmética, **M**)?

¿Cuáles son los grados de escolaridad máximo y mínimo (**Ls** y **Li**)?

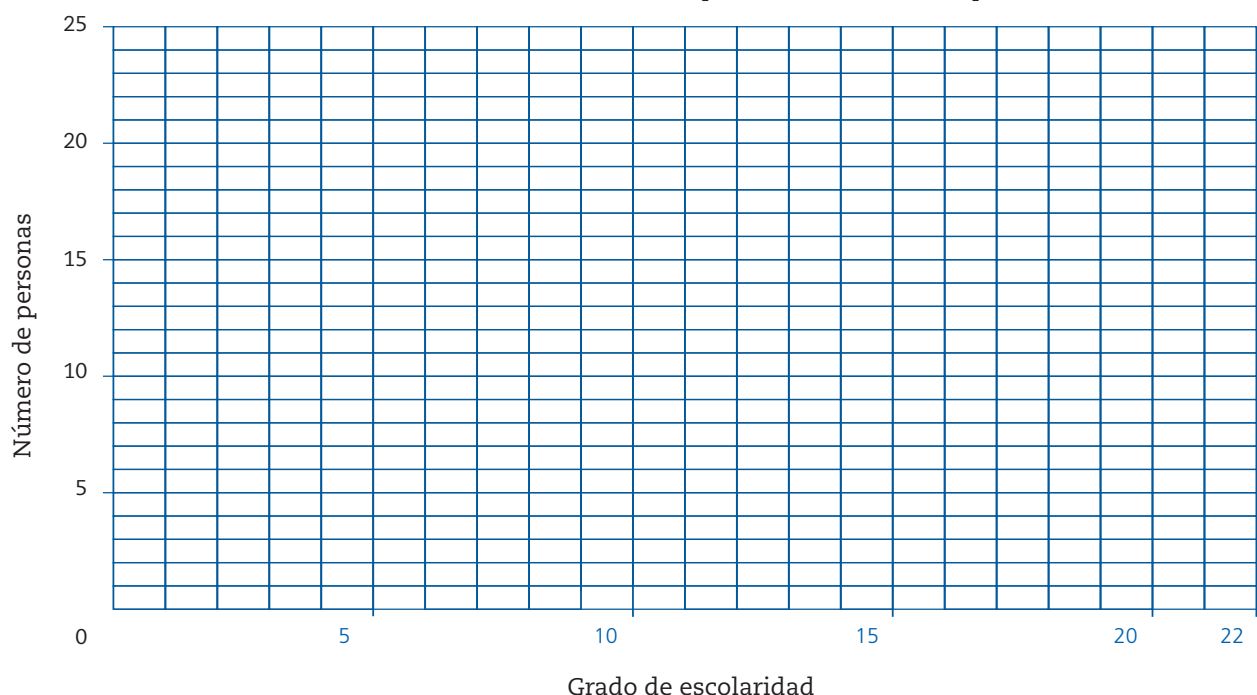
¿Cuál es el **rango** de los grados de escolaridad (**R**)?

3. Manuel es una de las 30 personas que contestó la encuesta. Él tiene 18 grados de estudio y considera que el grado de escolaridad promedio nacional (9.1) no refleja su situación. ¿Qué tan alejado del promedio nacional se encuentra? _____

a) Analicemos qué tan alejados o cercanos al número de grados de escolaridad promedio de estudios están las personas que participaron en la encuesta de Joel a partir de la ubicación de cada uno de los datos en la siguiente gráfica.



Grados de escolaridad de las 30 personas encuestadas por Joel



- b) En el eje horizontal, ubiquen el punto que corresponde al valor del grado de escolaridad promedio (**M**) del grupo. También ubiquen los valores del grado de escolaridad más frecuente (**Mo**) y el valor de la mediana (**Me**). ¿Cuál de estos tres valores está más al centro de los datos? _____
- c) En la gráfica también ubiquen el grado de escolaridad promedio nacional (9.1) y comparen los datos y valores de sus medidas de tendencia central. Observen cómo están distribuidos todos estos datos, ¿consideran que el valor de 9.1 grados de escolaridad también es representativo para el caso de los 30 datos registrados? _____ ¿Por qué? _____

- d) ¿Cuál es la diferencia entre el grado de escolaridad mínimo de las 30 personas (**Li**) y el promedio nacional? _____ ¿Y cuál es la diferencia entre el grado máximo (**Ls**) y el del promedio nacional? _____ ¿Qué tan alejado o cercano lo observan? _____
4. Comparen sus respuestas con el grupo. También consideren comparar los grados promedio de escolaridad nacional (9.1) y la media aritmética del conjunto de las 30 respuestas (**M**). ¿Cuál valor consideran que representa mejor el caso de Manuel y por qué? _____



■ Manos a la obra

Comparando conjuntos

- Trabajen en parejas. Analicen qué tan alejados o cercanos están los 30 datos registrados por Joel respecto a su media aritmética que representa los grados de escolaridad promedio del grupo de las personas que participaron en la encuesta.

Consideren el valor del grado de escolaridad promedio (media aritmética, **M**) y obtengan la diferencia que hay respecto a los grados de escolaridad de Manuel y de cada uno de los datos.

Dato	Diferencia respecto a la media aritmética	Dato	Diferencia respecto a la media aritmética
0	$0 - (\text{media aritmética}) =$	16	
1		17	
2		18	$18 - (\text{media aritmética}) =$
3		19	
4		20	
5		21	
6		22	
7		23	
8		24	
9		25	
10		26	
11		27	
12		28	
13		29	
14		30	
15			

- El número de grados de escolaridad que tiene Manuel, ¿es menor o mayor que el valor promedio del grupo (**M**)? _____
- Comparen la diferencia entre el valor 0 y el de los grados de escolaridad de Manuel, ¿qué signo tiene esa diferencia? _____
¿Cuál es mayor? _____



c) Sumen todas las diferencias, ¿cuál es el total? _____

El signo de la diferencia entre el dato y el valor de su media aritmética indica si el dato está antes o después de ese valor.

d) Completen la siguiente tabla con el valor absoluto de cada diferencia obtenida en la tabla anterior.

Dato	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
dato – media aritmética											
Dato	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
dato – media aritmética											

e) Obtengan el promedio de las distancias. Pueden utilizar una calculadora. _____

Dato interesante

El valor absoluto de un número es la distancia de dicho número al cero. Se expresa así:

$|-5| = 5$, y se lee: “el valor absoluto de -5 es igual a 5 ”.

$|5| = 5$ se lee: “el valor absoluto de 5 es igual a 5 ”.

Dos números que tienen igual valor absoluto, pero distintos signos se llaman *opuestos* o *simétricos*.

Cada valor absoluto representa la distancia del valor de un dato a la media aritmética. Las distancias se consideran siempre positivas, por eso se obtiene el valor absoluto.

2. Comparen sus resultados con sus compañeros. Comenten cuál es la mayor distancia que hay entre un dato y su media aritmética. Después, lean y comenten la siguiente información con ayuda de su maestro.

Al promedio de los valores absolutos de las distancias entre cada dato (valor) con respecto a su media aritmética se le llama *desviación media (DM)* y representa una medida de la dispersión de los datos. Se expresa como:

$$DM = \frac{|d_1 - M| + |d_2 - M| + |d_3 - M| + \dots + |d_n - M|}{n}$$

Donde M es el valor de la media aritmética del conjunto de datos, n es el número total de datos y d_1, d_2, \dots, d_n son los valores de los datos.

Si el valor de la desviación media es muy alto implica mayor variabilidad entre los datos, mientras que un valor igual que 0 implica que todos los valores son iguales, no hay variabilidad y, por lo tanto, coinciden con el valor de la media aritmética.

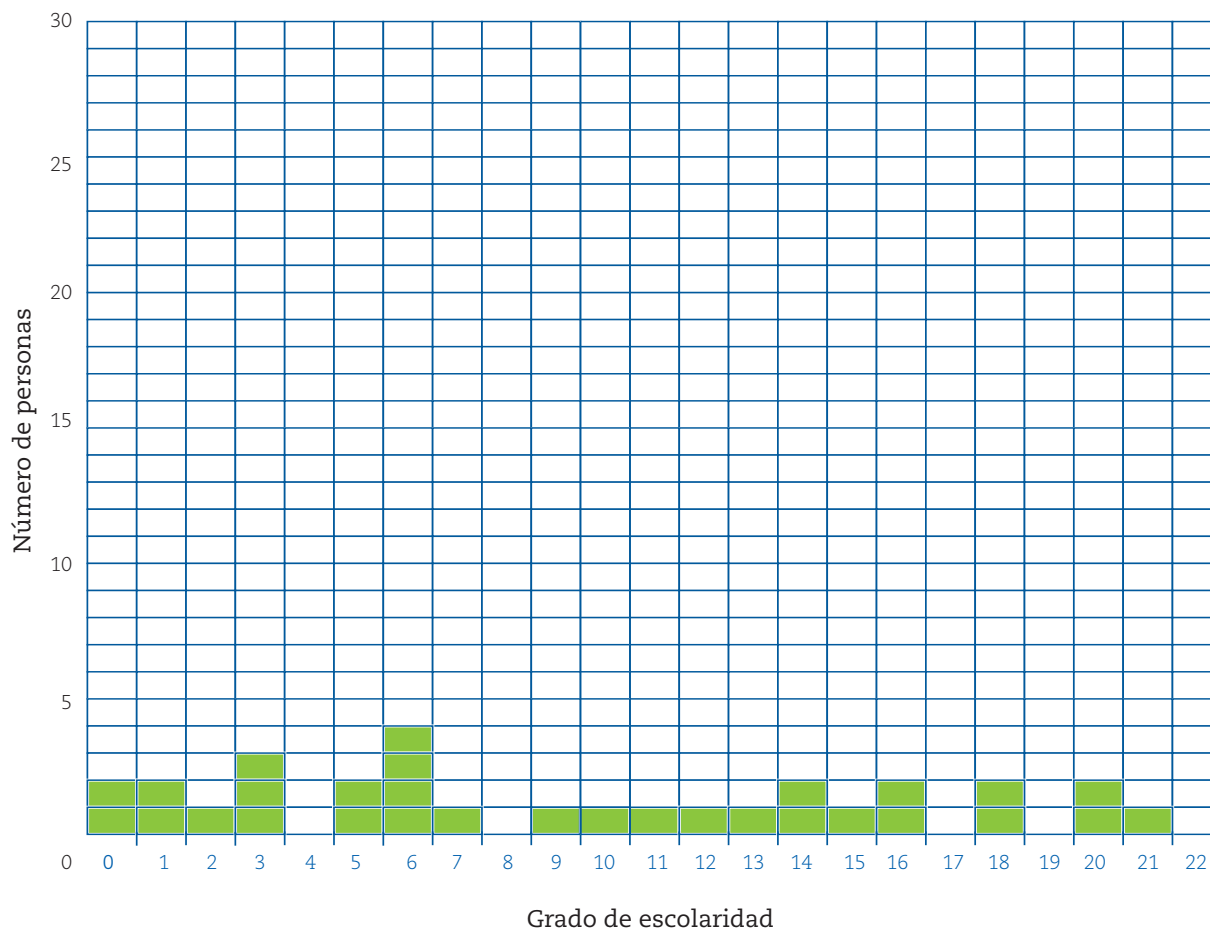


a) Con base en la información anterior y en las actividades de la sesión 1, ¿entre qué datos hay mayor diferencia respecto a los grados de escolaridad promedio? _____

3. Emma también realiza una encuesta a 30 personas y los datos que obtiene son los siguientes:



Grados de escolaridad de las 30 personas encuestadas por Emma



a) En este caso, ¿cuál es el número de grados de escolaridad más frecuente?

b) ¿Cuál es el número de grados de escolaridad que corresponde a la mediana?
_____ Representenlo en la gráfica.

c) ¿Cuál es el número de grados de escolaridad promedio (media aritmética)?
_____ Representenlo en la gráfica.

d) ¿Cuál es el rango de los grados de escolaridad? _____



e) Completen la siguiente tabla.

Dato	Valor absoluto de la diferencia respecto a la media aritmética	Dato	Valor absoluto de la diferencia respecto a la media aritmética
0	$ 0 - \text{media aritmética} =$	16	
1		17	
2		18	
3		19	
4		20	
5		21	
6		22	
7		23	
8		24	
9	$ 9 - \text{media aritmética} =$	25	
10		26	
11		27	
12		28	
13		29	
14		30	
15			

f) Calculen el promedio de las distancias de cada dato respecto a su media aritmética, es decir, la desviación media (**DM**). Pueden apoyarse de una calculadora.

g) De acuerdo con el valor de la desviación media, ¿este conjunto de datos tiene mayor o menor variabilidad? _____

4. En grupo, revisen sus resultados y respuestas. Con apoyo de su maestro, comparen la gráfica y los resultados de la sesión 1 con los de esta sesión. ¿En qué conjunto hay mayor dispersión entre los datos? Justifiquen su respuesta. _____



5. Observen el recurso audiovisual *Cómo obtener la desviación media de un conjunto de datos*. Posteriormente, comenten en grupo y con apoyo de su maestro el procedimiento que se sigue para calcularla.

La asistencia

- Entrevisten a 30 personas de su localidad y pregunten su grado de escolaridad. Registren sus resultados en la siguiente gráfica.



- Obtengan a continuación las medidas de tendencia central y de dispersión, y ubíquenlas en la gráfica.

Moda	Media aritmética	Mediana
Rango	Desviación media	

- Comparen sus resultados con los de la actividad 2 y los de la sesión anterior. Describan qué cambios y coincidencias observan.



- c) Consideren los grados de escolaridad promedio nacional según el Inegi y describan en su cuaderno qué tan lejos o cerca de ese valor se encuentran los valores de los grados de escolaridad promedio de cada conjunto estudiado.



2. Durante una semana, la asistencia a dos talleres de artes fue la siguiente:

A: 0, 45, 49, 50, 51, 55, 100

B: 48, 48, 50, 50, 51, 51, 52

- a) En el taller A, ¿cuál fue la asistencia promedio de la semana (media aritmética)?

¿Cuál es el valor de la mediana de asistencia durante esa semana? _____

- b) En el taller B, ¿cuál es la asistencia media de la semana? _____

¿Cuál es el valor de la mediana? _____

- c) ¿Qué tanto varió la asistencia en el taller A? _____

¿Y en el B? _____

- d) Para reconocer la dispersión de los datos de estas dos muestras, ¿sería necesario calcular la desviación media o es suficiente con calcular el rango? _____

¿Por qué? _____

- e) ¿Cuál es la desviación media? _____



3. Las carreras anotadas por dos equipos de beisbol en la serie de cinco partidos han sido:

Equipo	Carreras anotadas en cada partido				
A	6	8	1	2	3
B	8	4	3	4	1

- a) ¿Cuál es el rango del número de carreras anotadas por cada equipo? _____

¿Y la media aritmética? _____

- b) En este caso, ¿sirve el rango para diferenciar entre sí los resultados de estos equipos? Justifiquen su respuesta. _____



c) Si ubican en una recta los cinco datos del equipo A, ¿a qué distancia de la media está cada uno? (Recuerda que la distancia se considera siempre positiva.)

d) Registra en la tabla la distancia a la que se halla cada dato con respecto a la media.

Número de carreras anotadas por partido	6	8	1	2	3
Distancia con respecto a la media					

e) ¿Cuál es el valor más cercano a la media aritmética? _____

¿Y el más lejano? _____

f) ¿Cuál es la media aritmética de esas distancias? _____

4. Discutan, con argumentos, sus respuestas con otros compañeros. En caso de no coincidir, revisen sus procedimientos y cálculos para llegar a un acuerdo.

5. Calculen la desviación media de las carreras anotadas por el equipo B.

6. En grupo y con ayuda de su maestro, expongan y argumenten sus procedimientos y cálculos. Determinen cuál es el equipo más consistente y por qué. _____

7. Completen la siguiente conclusión sobre el tema de los grados de escolaridad en México y su comunidad.

De acuerdo con los resultados obtenidos al realizar _____
encuestas a grupos de 30 personas de _____, el número
de grados de escolaridad máximo es _____ y el mínimo es
_____.

El número de grados de escolaridad promedio es _____, y al
compararlo con los grados de escolaridad promedio nacional se observa que
es _____; lo que implica que las personas están _____ que la
población del país.



26. Histogramas y polígonos de frecuencia

Sesión
1

■ Para empezar



¿Te has preguntado alguna vez cómo se produjeron las estadísticas o la información que nos proporcionan los medios de comunicación? Por ejemplo, sabemos que en México tres de cada diez mujeres se convierten en madres antes de cumplir 20 años; también que entre 40 y 60% de los embarazos entre las jóvenes no son deseados. ¿De dónde surgen estos datos? ¿Por qué podemos confiar en ellos?

La mayor parte de los datos se generan a partir de su levantamiento y registro por medio de encuestas, conteos o sondeos. Una vez que se han recolectado, es importante saber comunicarlos. Para ello es necesario conocer, estudiar y aplicar los diferentes conceptos, técnicas, procedimientos y recursos estadísticos que existen. En esta secuencia conocerás y utilizarás dos tipos de gráficas que permiten organizar y presentar datos agrupados en clases o intervalos.

■ Manos a la obra

Programa de televisión

1. Trabajen en pareja la siguiente actividad.

A 30 alumnos de segundo grado que vieron un programa de televisión se les aplicó una encuesta y una de las preguntas planteadas fue: “¿Qué calificación le asignas, entre 0 y 20 puntos, según tu grado de satisfacción, a los contenidos del programa?”. La serie de 30 respuestas que dieron fue:

3	14	13	3	13	9	17	13	3	17
8	0	9	13	8	8	20	14	10	2
20	13	9	10	16	2	12	1	2	20

- a) ¿Cómo organizarían esta serie de respuestas? _____
- b) Muestren en su cuaderno los datos organizados de acuerdo con el criterio que indicaron.



c) ¿Qué gráfica elegirían para representar los resultados de las respuestas y por qué?

Constrúyanla en su cuaderno.

d) ¿Cuál es el grado de satisfacción más frecuente acerca de los contenidos del programa por parte de los estudiantes? _____

¿Es posible identificar ese valor en la gráfica? _____

Si la respuesta es afirmativa, ubíquenlo.

e) ¿Cuál es el promedio del grado de satisfacción (media aritmética)? _____

De igual manera, si es posible, ubiquen ese valor y tracen una línea perpendicular al eje horizontal.

f) Si se toma como referente la ubicación de la media aritmética, ¿es posible decir que hay 50% de respuestas antes del valor de la media y otro 50% después?

_____ En caso negativo, señalen la proporción en que se distribuyen las respuestas a partir de la ubicación de la media aritmética. _____

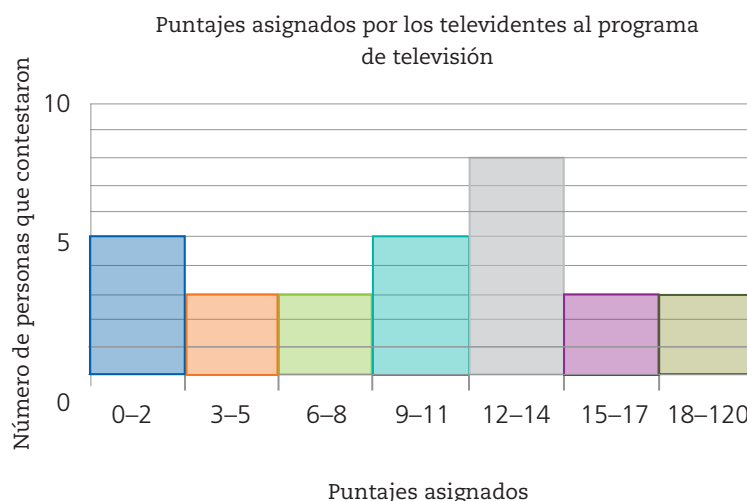
g) Ahora consideren cuál es el puntaje de las respuestas más frecuentes y señalen qué proporción representa del total de respuestas obtenidas. _____

2. Observen la gráfica.

a) Describan en su cuaderno sus características: los valores de los ejes, el tipo de barras, los títulos de los rótulos de las series de datos representados, entre otros.

b) Comparen esta gráfica con la que construyeron y señalen en su cuaderno las diferencias.

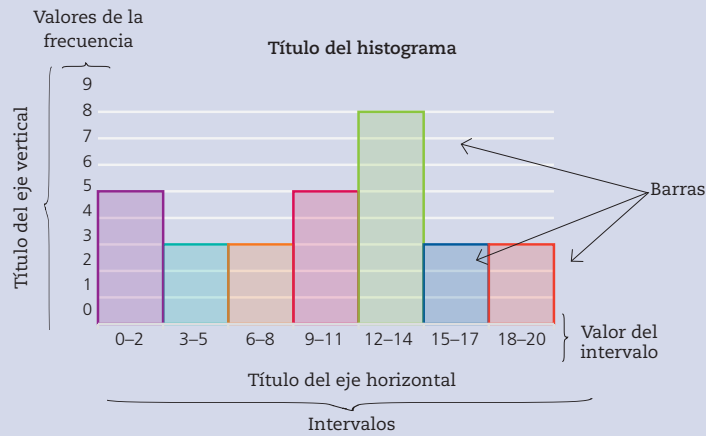
c) En esta última gráfica, ubiquen los valores de la media aritmética y la moda. Luego describan en su cuaderno en qué porcentaje quedan distribuidas las respuestas de los estudiantes respecto de cada una de esas medidas.



3. En grupo, comparen sus respuestas. Consideren las características diferentes a las suyas que otros compañeros encontraron y la manera en que se presentan en el gráfico. Con ayuda de su maestro, lean la siguiente información, coméntenla y consideren las características que identificaron.



El histograma es una representación gráfica que se utiliza en estadística. Está formado por barras que se presentan juntas, es decir, sin espacio entre ellas. La base de cada barra corresponde a un intervalo y su altura representa la frecuencia de ese intervalo.



Sesión
2

Los intervalos

- Trabajen en pareja. La siguiente pregunta también pertenece a la encuesta aplicada a los estudiantes: “¿Cuánto tiempo pasaste frente al televisor viendo ese programa?”. Las respuestas se han reagrupado en cinco intervalos. El intervalo 30-59 agrupa los tiempos iguales o mayores que 30 minutos y menores o iguales que 59 (esto se expresa como: $30 \leq t \leq 59$).

Tiempo (min)	0-29	30-59	60-89	90-119	120-150
Frecuencia	2	4	8	7	9

- Representen en su cuaderno estos resultados con la gráfica que consideren más adecuada.
- El punto medio del intervalo (30-59) es $(30 + 59) \div 2 = 44.5$, ¿cuál es el centro, o punto medio, de los demás intervalos? Completen la tabla.

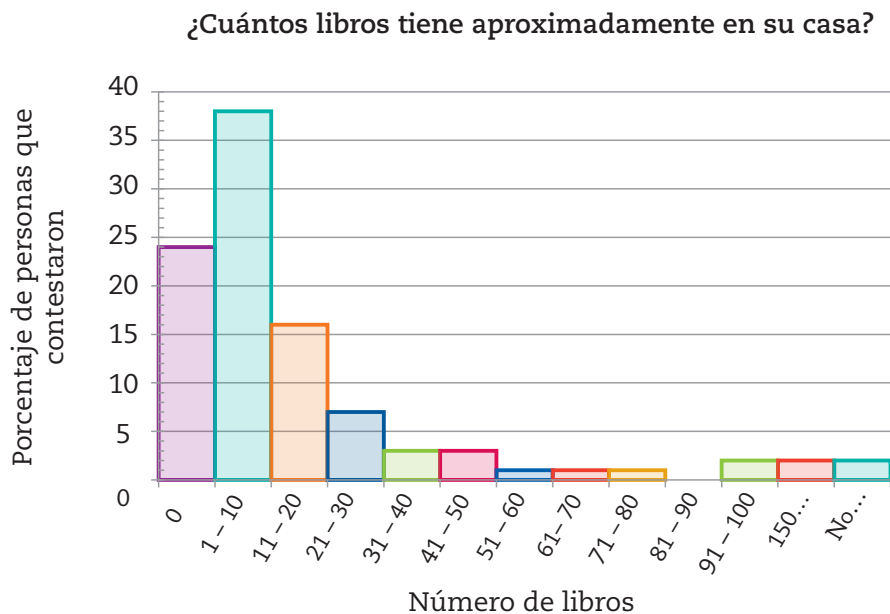
Tiempo (min)	0-29	30-59	60-89	90-119	120-150
Frecuencia	2	4	8	7	9
Punto medio del intervalo (tiempo en min)		44.5			

- ¿Cuál es el tiempo más frecuente que pasaron viendo el programa? _____
Expliquen cómo lo determinaron. _____

- d) Elaboren en su cuaderno el histograma utilizando valores centrales de cada intervalo.
- e) En grupo y con apoyo de su maestro, lean la siguiente información.

El **tamaño de un intervalo** es igual a la diferencia entre dos límites inferiores o superiores sucesivos. Por ejemplo, en el **histograma** el primer límite superior es 29, y el siguientes es 59; en consecuencia, el tamaño del intervalo es igual a $59 - 29 = 30$.

2. La siguiente gráfica es un histograma. En ella se muestran los datos obtenidos al contestar una de las preguntas de la “Encuesta Nacional de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales” realizada por el Consejo Nacional para la Cultura y las Artes (Conaculta) en 2010.



Dato interesante
Cada intervalo del histograma tiene un límite inferior y uno superior.

Fuente: Conaculta, “Encuesta Nacional de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales”, 2010.

- a) ¿Cuál es la pregunta que contestaron las personas entrevistadas? _____
- b) ¿Qué porcentaje contestó que tiene 10 libros o menos en su casa? _____
- c) ¿Qué porcentaje contestó que tiene entre 51 y 100 libros? _____
- d) El número total de personas encuestadas es 30 403. ¿Cuántas personas contestaron que tienen 10 libros o menos en su casa? _____

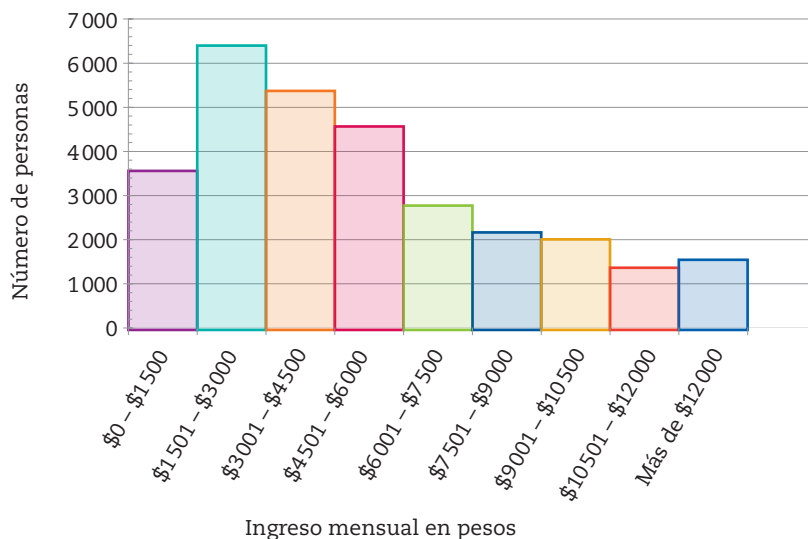
3. Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Comenten cómo las determinaron. Si los procedimientos fueron diferentes, intercámbienlos y pruébenlos.



Elaboración de más histogramas

- Trabajen en equipo y analicen las siguientes gráficas que muestran otros resultados relacionados con la pregunta: "¿Cuántos libros tiene aproximadamente en su casa?".

Ingreso mensual familiar de las personas que contestaron la encuesta y señalaron tener más de 10 libros en su casa



- ¿Qué información presenta la gráfica anterior? _____
- ¿Qué representa cada número del eje vertical de la gráfica? _____
- Observen cómo está rotulado el eje horizontal. ¿Qué representa cada valor, por ejemplo, \$1 501-\$3 000? _____
- Utilicen los datos de la gráfica para completar la siguiente tabla.

Ingreso mensual en pesos (intervalo)								
Número de personas (frecuencia)								

- La primera barra corresponde al intervalo \$0-\$1 500. ¿Qué interpretación dan al \$0 en este intervalo? _____
- Supongan que unen dos barras continuas de la gráfica para formar una sola barra. ¿Cuál será el rótulo de la nueva barra? _____
¿Qué altura tendrá la nueva barra? _____

2. Completen la tabla de frecuencias y el histograma que corresponde a la edad de las personas que contestaron la encuesta.

Edad de las personas que señalaron tener más de 10 libros en casa

Edad en años (intervalo de edades)	13-17	18-22			33-37	38-42		48-52		57 o más
Número de personas (frecuencia)	4 200		3 000		3 200	3 000	2 000	1 800		4 200

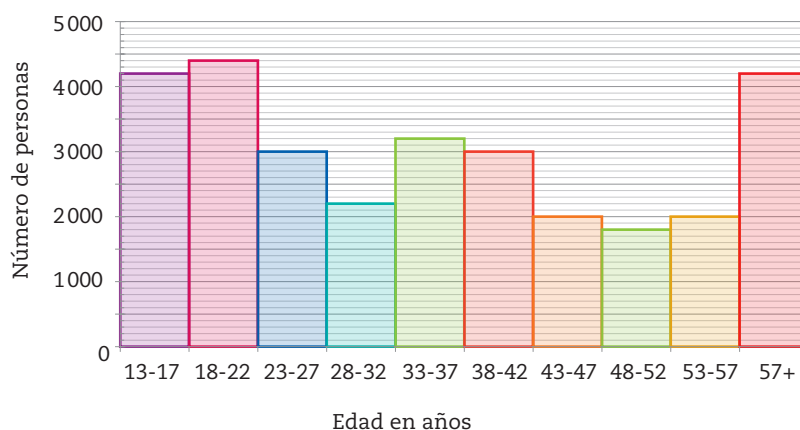
- a) Comparen y comenten la información que presentan la tabla y el histograma, a partir de los siguientes aspectos.

- ¿Qué representa la base de cada barra en el eje horizontal?

- En cada situación, ¿de qué tamaño son los intervalos?

- ¿Qué datos se presentan en el eje vertical y qué escala se utiliza? _____

Edad de las personas que contestaron la encuesta y señalaron tener más de 10 libros en su casa



3. De acuerdo con la información que presentan la tabla y el histograma de la “Encuesta de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales”, completen el siguiente párrafo:

La “Encuesta Nacional de Hábitos, Prácticas y Consumo Culturales” realizada en agosto de 2010 fue contestada por _____ personas en total. De ellas, 4 400 personas tenían entre _____ años de edad y _____ personas de 57 años o más. La edad de las personas más jóvenes que contestaron tener más de 10 libros en su casa es de _____ años.

4. Observen el recurso audiovisual *Histograma* y centren su atención en los aspectos relacionados con la construcción de este tipo de gráficas.



Gráficas poligonales de frecuencias

- Trabajen en pareja. A partir de los siguientes datos, elaboren en su cuaderno una tabla de frecuencias y un histograma que los presente organizados en 5 o 6 intervalos, según consideren conveniente. Después, respondan las preguntas en su cuaderno.

80	68	102	95	124	95	121	81	80	106
76	92	68	119	84	113	72	65	97	107
115	73	100	82	98	100	85	94	105	119
67	87	93	120	104	82	115	111	74	82
96	102	77	66	75	92	100	68	124	93

- ¿Cuál es el dato con mayor valor? ¿Cuál es el de menor valor? ¿Cuál es la diferencia entre el dato mayor y el menor?

A la diferencia entre el dato mayor y el dato menor se le llama **rango**. Una manera de determinar el tamaño de cada intervalo es dividir el rango entre el número de intervalos.

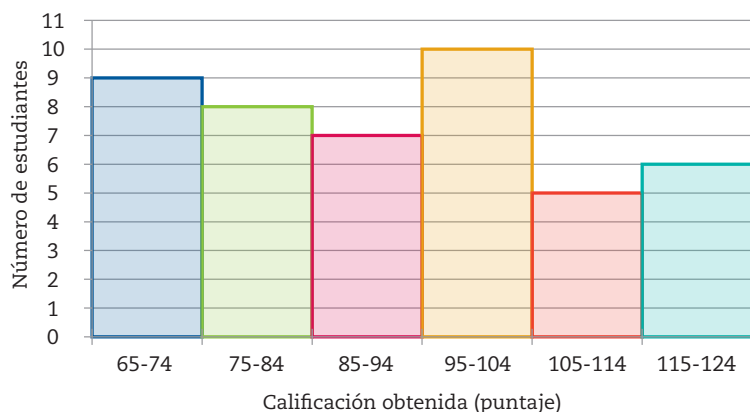
- Si se quisieran formar 6 intervalos, ¿de qué tamaño debería ser cada intervalo?
- Determinen el valor mínimo y el máximo de cada intervalo de su tabla e histograma.

- Comparen su tabla e histograma con los de otros compañeros y respondan:
 - ¿Utilizaron los mismos intervalos? ¿Son todos del mismo tamaño?
 - Una pareja propuso los siguientes intervalos:

61-70, 71-80, 81-90, 91-100, 101-110, 111-120

- ¿Son adecuados estos intervalos para considerar los datos? ¿Por qué?

- Un par de estudiantes elaboró el siguiente histograma. Analíenlo y respondan en su cuaderno.



- ¿Cuántos intervalos tiene el histograma? ¿Son del mismo tamaño? ¿Cuál es el tamaño de cada intervalo?
- En el intervalo 65 a 74 puntos hay 9 estudiantes que obtuvieron esos puntajes. ¿Podrían decir cuántos estudiantes obtuvieron exactamente 70 puntos? ¿Y cuántos obtuvieron 71 puntos? ¿Por qué?



En un histograma por intervalos se pierde la frecuencia de los datos individuales. Además, no es posible realizar operaciones aritméticas con intervalos. En su lugar, se obtiene el **punto medio del intervalo**, llamado también **marca de clase**, para representarlo y operar.

El punto medio de un intervalo se calcula de la siguiente manera:

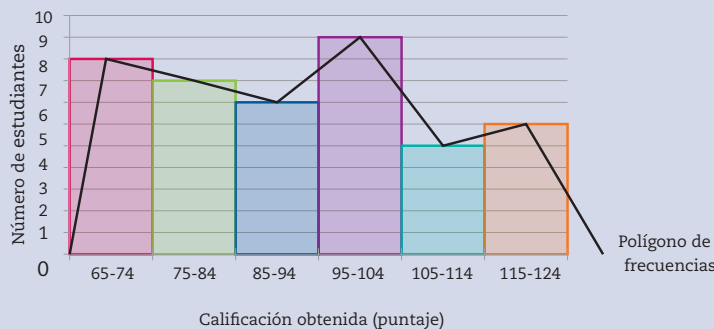
$$\text{Marca de clase} = \frac{\text{Límite superior} + \text{Límite inferior}}{2}$$

$$\text{Por ejemplo: } \frac{74 + 65}{2} = \frac{139}{2} = 69.5$$

- c) Señalen con un punto en el eje horizontal del histograma que elaboraron los valores del punto medio de cada intervalo. Tracen, a partir del primer punto medio, un segmento perpendicular al eje horizontal que interseque el techo de la barra que corresponde con la frecuencia del intervalo. ¿Cómo queda dividida cada barra? _____
- d) Hagan lo mismo en cada barra para ubicar los puntos medios sobre los techos de las barras. Unan los puntos obtenidos en el techo de cada barra con segmentos de recta. Al terminar de unirlos, habrán construido un polígono de frecuencias. Comparen su trabajo con el de sus compañeros. Luego, lean y comenten en grupo la siguiente información:

La **gráfica poligonal de frecuencias** de datos agrupados en intervalos del mismo tamaño se obtiene al unir, mediante segmentos de recta, los puntos medios consecutivos de los techos de las barras del histograma correspondiente.

Por ejemplo:



- Tracen los polígonos de frecuencias de las gráficas que elaboraron anteriormente. Para ello deberán determinar el punto medio de cada intervalo. Anótenlo en las tablas correspondientes.
- Observen el recurso audiovisual *Polígonos de frecuencia* para revisar los aspectos relacionados con la construcción de este tipo de gráficas.



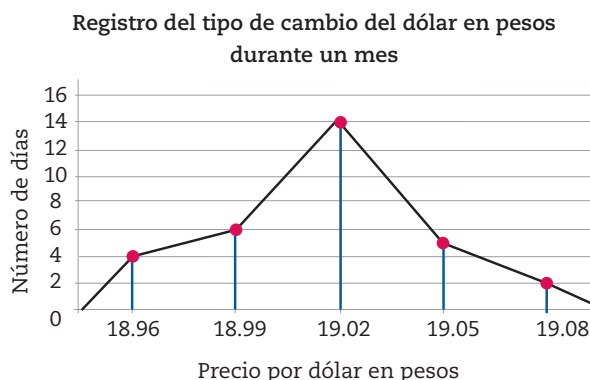
■ Para terminar

Interpretación de gráficas estadísticas



1. Considera el polígono de frecuencias para completar la tabla de distribución de frecuencias.

Número de intervalo	Intervalo	Punto medio del intervalo	Frecuencia absoluta
1	18.95-18.97	18.96	
2	18.98-19.00		6
3		19.02	14
4			5
5		19.08	2

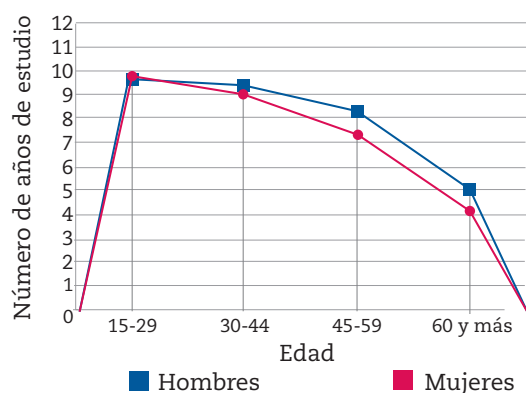


2. A partir de los polígonos de frecuencia, contesta en tu cuaderno las preguntas.

a) ¿Qué información presenta cada polígono de frecuencia?

- b) Describe qué ocurre con el grado de estudios de las mujeres respecto al intervalo de edad y qué ocurre en el caso de los hombres.
- c) Describe también qué ocurre entre hombres y mujeres cuando el grado de estudios de cada grupo es igual o muy cercano, cuando es mayor y cuando se invierte.
- d) Al terminar, intercambia y compara tus respuestas con las de otros compañeros. Luego, lean la siguiente información.

Promedio de escolaridad de la población de 15 años y más por grupo de edad y sexo



La gráfica poligonal de frecuencias permite comparar el comportamiento de dos o más conjuntos de datos que se refieren a la misma situación.

3. A partir de la gráfica de la actividad anterior, contesta las preguntas.

- a) ¿En qué intervalo de edad las mujeres presentan mayor grado de estudios que los hombres? _____
- b) ¿En qué intervalo de edad es mayor la diferencia entre el grado de estudios de los hombres respecto al de las mujeres? _____

4. Las siguientes gráficas muestran algunas de las características de los estudiantes de una telesecundaria. Relaciona cada gráfica con la o las afirmaciones que consideres que describen la información que muestra.



Gráfica	Afirmación																																
<p>A</p> <p>Calificaciones obtenidas en el examen de diagnóstico de Matemáticas</p> <table border="1"> <caption>Data for Gráfica A</caption> <thead> <tr> <th>Calificación</th> <th>Número de estudiantes</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>5.0-5.9</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>6.0-6.9</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td>7.0-7.9</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>8.0-8.9</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>9.0-9.9</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>5</td> </tr> </tbody> </table>	Calificación	Número de estudiantes	5.0-5.9	9	6.0-6.9	8	7.0-7.9	15	8.0-8.9	18	9.0-9.9	10	10	5	<p>() La edad de los estudiantes está entre 11 y 15 años.</p> <p>() Hay 18 estudiantes de segundo grado aprobados en Matemáticas.</p>																		
Calificación	Número de estudiantes																																
5.0-5.9	9																																
6.0-6.9	8																																
7.0-7.9	15																																
8.0-8.9	18																																
9.0-9.9	10																																
10	5																																
<p>B</p> <p>Números de estudiantes aprobados</p> <table border="1"> <caption>Data for Gráfica B</caption> <thead> <tr> <th>Materia</th> <th>1°</th> <th>2°</th> <th>3°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Español</td> <td>27</td> <td>20</td> <td>13</td> </tr> <tr> <td>Matemáticas</td> <td>28</td> <td>18</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>Geografía</td> <td>30</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>Ciencia</td> <td>26</td> <td>18</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>Historia</td> <td>0</td> <td>17</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>Formación</td> <td>0</td> <td>20</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>Artes plásticas</td> <td>29</td> <td>19</td> <td>14</td> </tr> </tbody> </table>	Materia	1°	2°	3°	Español	27	20	13	Matemáticas	28	18	12	Geografía	30	0	0	Ciencia	26	18	10	Historia	0	17	12	Formación	0	20	15	Artes plásticas	29	19	14	<p>() Aproximadamente 50% de los estudiantes están inscritos en primer grado.</p>
Materia	1°	2°	3°																														
Español	27	20	13																														
Matemáticas	28	18	12																														
Geografía	30	0	0																														
Ciencia	26	18	10																														
Historia	0	17	12																														
Formación	0	20	15																														
Artes plásticas	29	19	14																														
<p>C</p> <p>Edad de los estudiantes</p> <table border="1"> <caption>Data for Gráfica C</caption> <thead> <tr> <th>Edad</th> <th>Hombres</th> <th>Mujeres</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>11</td> <td>5</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>15</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>20</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>15</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>10</td> <td>10</td> </tr> </tbody> </table>	Edad	Hombres	Mujeres	11	5	5	12	15	15	13	20	20	14	15	15	15	10	10	<p>() En la telesecundaria, 31% de los estudiantes son de segundo grado.</p> <p>() En la materia de Ciencias hubo alumnos aprobados de los tres grados.</p>														
Edad	Hombres	Mujeres																															
11	5	5																															
12	15	15																															
13	20	20																															
14	15	15																															
15	10	10																															

5. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenta qué tipo de datos se presentan en un histograma y en un polígono de frecuencias. ¿En qué se parecen y en qué son diferentes las gráficas? Anota las conclusiones en tu cuaderno.

6. Utilicen el recurso informático *Polígonos de frecuencia* para analizar otras situaciones en las que sea posible organizar y presentar los datos en polígonos de frecuencia. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t10_s01_descartes-JS/index.html

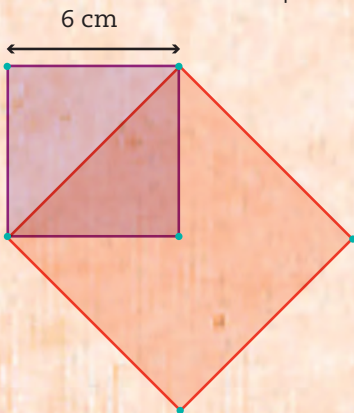


Evaluación

Es tiempo de revisar lo que has aprendido después de trabajar en este bloque. Resuelve los siguientes problemas.

- Encuentra dos números cuya suma es -12 y su cociente es -5 : _____
- Escribe una división cuyo cociente sea $-\frac{3}{4}$: _____
- Escribe una multiplicación de dos factores cuyo producto sea -4.5 : _____
- Un camión transporta 50 huacales. En cada huacal van 50 pollos y cada pollo se venderá en 50 pesos. ¿Cuánto dinero se obtendrá de la venta de los pollos? _____
Si cada huacal pesa en promedio 125 kg, ¿cuántas libras pesa en promedio un pollo?

- En México se producen diariamente 1.9×10^5 barriles de petróleo crudo. La meta es producir 2.5×10^5 barriles por día. ¿Cuántos barriles faltan para lograr la meta?



- ¿Cuánto mide un lado del cuadrado naranja de la izquierda? _____
- En una escuela primaria, las utilidades de la cooperativa escolar en un ciclo escolar fueron de \$2 438. Este dinero se repartirá proporcionalmente entre los seis grupos de la escuela. Los grupos de primero y segundo tienen 20 alumnos cada uno; el grupo de tercero tiene 18; y cuarto, quinto y sexto tienen 16 alumnos cada uno. Completa la siguiente tabla anotando lo que corresponde a cada grupo.

Primero	Segundo	Tercero	Cuarto	Quinto	Sexto

- Para tejer un mantel de cierta puntada, la maestra indica que deben comprar una madeja de estambre por cada metro cuadrado que mida el mantel. Clara quiere hacer un mantel circular de 1.5 m de diámetro, ¿cuántas madejas de estambre debe comprar? _____
- A continuación se muestra el número de aciertos obtenidos en el examen de Matemáticas por los dos grupos de 2° grado.

A: 100, 90, 50, 10, 30, 60, 70, 60, 75, 85, 65, 32, 28, 20, 60, 65, 90, 77, 63, 40

B: 26, 30, 15, 48, 35, 97, 25, 60, 28, 75, 35, 68, 70, 57, 85, 80, 55, 80, 64, 72

El examen tuvo 100 preguntas y se considera que el desempeño del grupo es bueno si el promedio (media aritmética) del número de aciertos obtenidos en total es mayor que 60.

- ¿Qué grupo consideras que tiene mejor desempeño? _____
Justifica tu respuesta. _____
- Elabora en tu cuaderno el histograma que muestre la distribución del número de aciertos obtenidos en el examen de Matemáticas por el grupo A.
- Traza en el histograma los polígonos de frecuencias que muestren las distribuciones de los aciertos obtenidos por los dos grupos, así como los valores que consideres importantes para destacar la justificación de tu respuesta en el inciso a.

Selecciona la respuesta correcta.

1. En una multiplicación de cinco factores, el resultado es un número negativo. ¿Cuántos factores negativos es posible que haya en esa multiplicación?

a) Sólo uno b) Uno, tres o cinco c) Dos o cuatro d) Sólo tres

2. Encierra en un círculo las expresiones equivalentes a $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$:

a) $\frac{1}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)$ c) $2\left(\frac{1}{4}n\right) + \frac{1}{4}$ e) $0.5n + 0.5$
b) $\frac{1}{2}(n + 1)$ d) $\frac{2(n+1)}{2}$ f) $\frac{1}{2}n + 0.5$

3. Subraya las expresiones que generan la siguiente sucesión de números:

$\frac{1}{2}, 1, \frac{6}{4}, 2, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, \dots$

a) $\frac{n}{4}$ b) $\frac{1}{2}n$ c) $\frac{2^n}{4}$ d) $0.25n$ e) $\frac{n}{4} + \frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{4}(n + 1)$ g) $0.5n$

4. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3x - 2y = 7$$

$$2x + y = 14$$

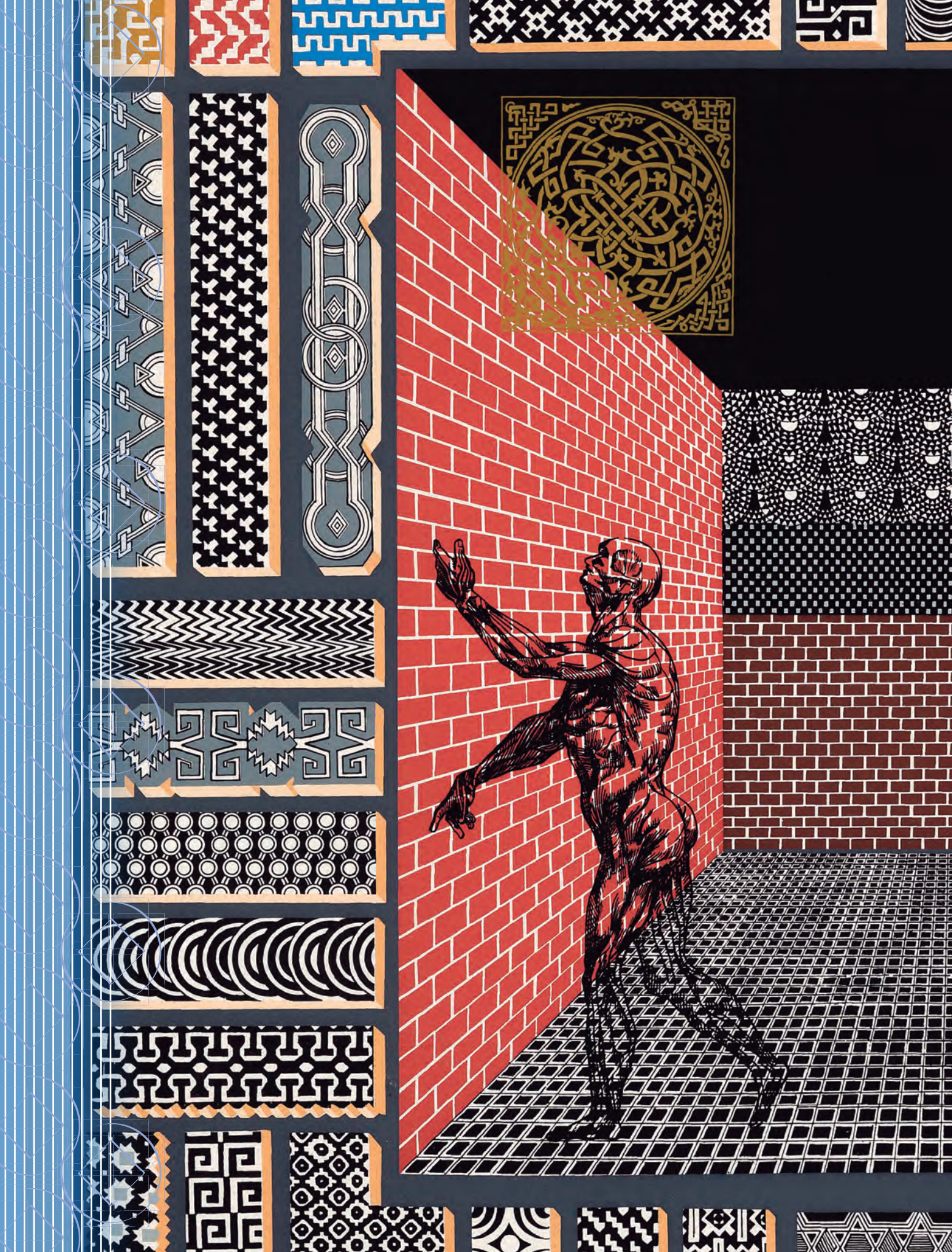
- a) Si se resuelve por el método de igualación, ¿cuál es la igualdad que resulta si se despeja y de ambas ecuaciones? Enciérrala en un círculo.

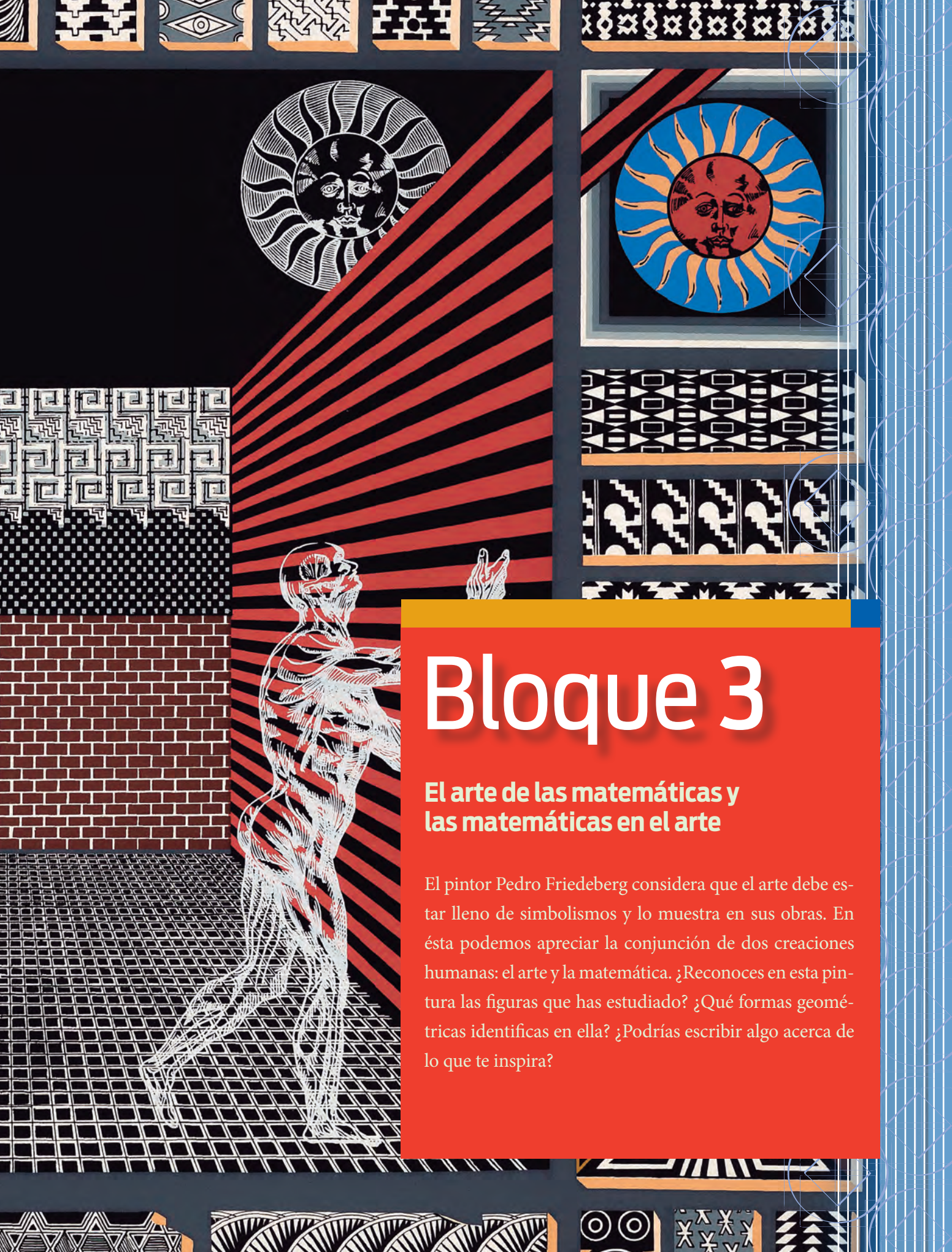
• $4x - 3x = 7 - 28$ • $4x + 3x = 7 + 28$ • $4x - 3x = 7 + 28$ • $4x + 3x = 7 - 28$

- b) Si se resuelve por el método de sustitución, ¿cuál es la expresión que resulta de despejar x de la segunda ecuación y sustituirla en la primera? Enciérrala.

• $-7y = 14 - 42$ • $-7y = 14 + 42$ • $7y = 14 - 42$ • $7y = -14 - 42$







Bloque 3

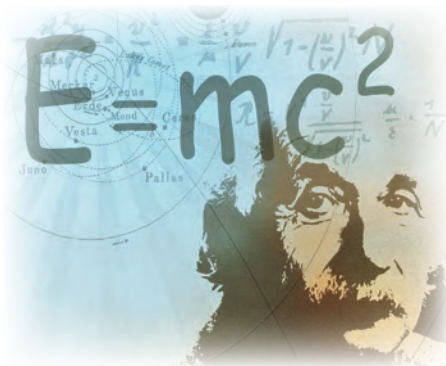
El arte de las matemáticas y las matemáticas en el arte

El pintor Pedro Friedeberg considera que el arte debe estar lleno de simbolismos y lo muestra en sus obras. En ésta podemos apreciar la conjunción de dos creaciones humanas: el arte y la matemática. ¿Reconoces en esta pintura las figuras que has estudiado? ¿Qué formas geométricas identificas en ella? ¿Podrías escribir algo acerca de lo que te inspira?

27. Potencias con exponente entero 2

Sesión
1

■ Para empezar



En diferentes ámbitos de la sociedad se manejan cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por ejemplo, el monto total de las remesas que envían los mexicanos que trabajan en Estados Unidos asciende a miles de millones de dólares; la deuda pública de México en 2018 era de 11 billones de pesos, aproximadamente; el presupuesto del gobierno federal también está en el rango de los billones de pesos; la población mundial ronda los siete mil millones de habitantes. Además de estas grandes cantidades, se conocen desde hace años las que sirven para expresar datos relacionados con el cosmos, a las que suele llamarse

cantidades astronómicas.

En esta secuencia continuarás el estudio de la potenciación, que sirve para expresar, de manera simplificada, cantidades muy grandes o muy pequeñas, como la medida del diámetro de una bacteria; así como para resolver problemas en los que una o varias cantidades crecen exponencialmente.

■ Manos a la obra

La base, el exponente y la potencia

1. Trabajen en pareja. Calculen las potencias que se piden y después contesten las preguntas sin hacer las operaciones.

$$4^2 = \quad 4^3 = \quad 4^4 = \quad 4^5 = \quad 4^6 =$$

- a) ¿En qué cifra termina la séptima potencia de 4? _____
- b) ¿En qué cifra termina la vigésima potencia de 4? _____

$$7^2 = \quad 7^3 = \quad 7^4 = \quad 7^5 = \quad 7^6 =$$

- c) Sin hacer el cálculo, ¿cuál es la última cifra de 7^7 ? _____
- d) ¿En qué cifra terminará la décima potencia de 7? _____

2. Expliquen qué hicieron para responder las preguntas anteriores y concluyan: ¿las potencias de una misma base tienden a generar un patrón? Argumenten su respuesta.



3. Calculen mentalmente el resultado de las operaciones y el valor de x .

$$(8 + 3)^2 =$$

$$\sqrt{42 - 6} =$$

$$(3 + x)^2 = 25$$

$$\sqrt{(35 + 14)} =$$

$$(9 + 6 - 11)^2 =$$

$$(12 - x)^2 = 49$$

- a) Marquen con una palomita (✓) el resultado que consideren correcto para la operación $(298)^2$, sin usar calculadora.

88 804

8 804

90 804

- b) Elijan el resultado que consideren que corresponde a la operación $(195)^2$, sin usar calculadora.

40 405

38 025

24 405

4. En grupo, comparen sus respuestas y comenten la manera en que las obtuvieron.

Los tres elementos de la potenciación son:

$$\begin{array}{c} \text{Exponente} \\ \text{Base} \cdot x^a = b \cdot \text{Potencia} \end{array}$$

La raíz cuadrada es la **operación inversa** de elevar al cuadrado una cantidad llamada base.

$$\begin{array}{c} \text{Índice} \rightarrow a \sqrt{} = x \leftarrow \text{Raíz} \\ \text{Radical} \nearrow \sqrt{} \\ \sqrt{} \uparrow \text{Radicando} \end{array}$$

Cuando se trata de la raíz cuadrada, el índice (2) no se escribe.

5. Marquen con una palomita (✓) las respuestas correctas; pueden ser más de una.

La base de una potencia puede ser expresada como:

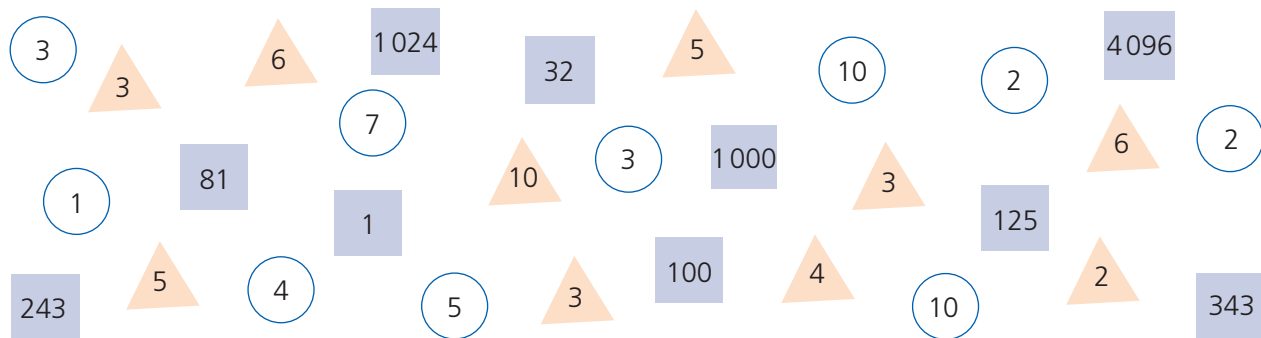
un número una literal una suma una diferencia una ecuación

El radicando de una raíz puede expresarse como:

un número una literal una suma una diferencia una ecuación

6. Trabajen en pareja. Los números anotados en círculos son bases de potencias, los anotados en triángulos son exponentes y los que están en cuadrados son potencias (resultados). Anoten en la tabla las diez expresiones exponenciales que se pueden formar con ellos.





- | | | | | |
|----|----|----|----|----|
| a) | c) | e) | g) | i) |
| b) | d) | f) | h) | j) |

7. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Expliquen cómo los encontraron y a qué se debe que obtuvieran esas expresiones.

Crecimiento exponencial

1. Trabajen en pareja. Resuelvan los siguientes problemas.

- En una escuela secundaria hay cinco grupos. En cada grupo se pueden formar cinco equipos de cinco alumnos cada uno. ¿Cuántos alumnos hay en la escuela?

- Un número, más su cuadrado, es igual a 30. ¿Cuáles números cumplen con esta condición? _____
- Un número, más su cubo, es igual a 30. ¿Cuáles números cumplen con esta condición? _____
- Encuentren dos números enteros consecutivos cuya diferencia de cuadrados sea 37. _____
- Encuentren dos números impares consecutivos cuya diferencia de cuadrados sea 72. _____

2. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Vean si hay resultados diferentes que sean correctos y corrijan los posibles errores.

3. Anoten el término que falta en cada operación.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $3^5 \times \square^{\square} = 3^7$ | c) $2^7 \times 2^5 = \square^{\square}$ | e) $7^4 \times \square^{\square} = 7^5$ |
| b) $\square^{\square} \times 5^3 = 5^7$ | d) $4^4 \times \square^{\square} = 4^4$ | f) $\square^{\square} \times a^5 = a^8$ |

$$g) 3^2 \times 3^{-3} \times 3^4 = \square^{\square}$$

$$i) (2 + 3)^2 \times (2 + 3)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$h) 2^3 \times \square^{\square} \times 2^7 = 2^0 = 1$$

$$j) (8 - 3)^{-2} \times (8 - 3)^5 \times (8 - 3)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

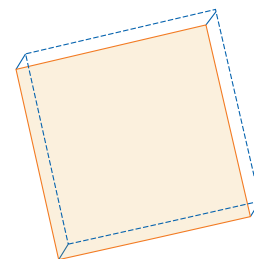
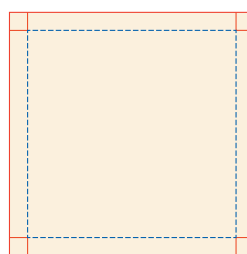
4. Lean la siguiente información y revisen sus respuestas de la actividad 3. Analicen los posibles errores y corrijanlos.

La expresión $a^m \times a^n$ es una multiplicación de dos potencias con la misma base. El resultado es la misma base elevada a la suma de los exponentes, $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

5. Para hacer una caja de papel sin tapa, a una hoja de 20 cm por lado se le recortan cuadrados de un centímetro por lado en cada esquina.

Luego, las cuatro partes marcadas con líneas punteadas se doblan hacia arriba, como se muestra en la figura.

- a) ¿Cuánto mide un lado de la base de la caja? _____
 b) ¿Cuál es el área de la base de la caja? _____
 c) ¿Cuál es el volumen de la caja? _____



6. En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y analicen los procedimientos que utilizaron; corrijan los errores.
7. Piensen en otras cajas que se pueden hacer con la misma hoja de 20 cm por lado. Usen la siguiente tabla para contestar las preguntas que vienen después. Si necesitan más renglones, hagan una tabla más grande en su cuaderno.

Medida de cada lado de la hoja (en cm)	Medida de un lado de los cuadrados que se recortan (en cm)	Volumen de la caja (en cm ³)
20	1	$(20 - 2)^2 \times 1 = 324$
20	2	
20	3	
20	4	
20	5	

- a) ¿Cuál es el mayor volumen que le cabe a la caja? _____
 b) ¿Qué medida tendrán los cuadrados que se recorten para esa caja? _____

8. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Vean qué medidas pusieron los equipos que lograron obtener el mayor volumen de la caja; si no coincidieron, analicen quién tiene la razón y por qué.



Día	María	Pedro
1	100	1
2	100	2
3	100	4
4		8
5		16
6		32
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		

9. Resuelvan el siguiente problema.

Pedro se propone ahorrar cada día el doble de lo que guardó el día anterior. María piensa ahorrar cada día \$100. Analicen cada plan, completen la tabla de la izquierda y contesten las preguntas.

Analicen lo que sucede el día 5.

- ¿Cuánto ahorró María? _____ ¿Cuánto fue el ahorro de Pedro? _____
- ¿A partir de qué día el ahorro de Pedro es mayor que el de María? _____
- La operación 2^{15} permite averiguar lo que ahorró Pedro en un día específico. ¿A qué número de día le corresponde? _____

10. Con apoyo de su maestro, comparen los resultados de la tabla. Comenten por qué hay un momento en el que Pedro rebasa la cantidad ahorrada por María.

11. Observen el recurso audiovisual [Crecimiento exponencial](#) para conocer y analizar otras situaciones que corresponden a este tipo de crecimiento.



El número más grande posible

1. Trabajen en equipo. Resuelvan los siguientes problemas; algunos pueden tener más de una solución correcta.

- ¿Cómo se expresaría el número 10 utilizando cinco nueves? _____
Una manera es la siguiente: $\frac{9^9}{9^9} + 9 = 10$. Encuentren otras dos formas distintas y expliquen por qué se cumplen las igualdades. _____
- Utilizando dos cifras diferentes y ningún otro signo, expresen el menor valor entero positivo. _____
- Utilizando al mismo tiempo las diez cifras del sistema decimal de numeración, expresen el número 1. _____
- ¿Cuál es el mayor valor que se puede expresar con cuatro unos? _____
- Expresen el mayor valor posible utilizando tres números dos. _____
- Expresen el mayor valor posible utilizando tres números cuatro. _____

2. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados.

3. Piensen cuál es la diferencia entre las expresiones $(2^2)^2$ y 2^{2^2} , y escriban si son equivalentes. Justifiquen en su cuaderno su respuesta.

4. Con apoyo de su maestro, lean la siguiente información y compárenla con lo que escribieron en el punto anterior.

La expresión $(a^x)^y$ es una potencia cuya base es también una potencia que está dentro del paréntesis (a^x) . A esta expresión se le denomina **potencia de una potencia** y su resultado es a^{xy} .

La expresión a^{x^y} es una potencia cuya base es a y cuyo exponente es la potencia de una potencia a^{x^y} .

Por ejemplo, si se da un valor cualquiera a estas expresiones, se tiene:

$(3^3)^3 = 3^9$, mientras que $3^{3^3} = 3^{27}$, por lo tanto, estas expresiones **no son equivalentes**.

5. Escriban el término que falta en cada operación para que sea correcta.

a) $\frac{3^{10}}{\square^{\square}} = 3^4 = 81$

e) $\frac{\square^{\square}}{3^5} = 3^{-1} = \frac{\square}{\square}$

i) $\frac{\square^{\square}}{8^3} = 8^{-3} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{\square^{\square}}{4^3} = 4^2 = 16$

f) $\frac{4^5}{\square^{\square}} = \square^{\square} = 1$

j) $\frac{\square^{\square}}{\square^{\square}} = \square^{\square} = 1$

c) $\frac{5^2}{5^3} = \square^{\square} = \frac{\square}{\square}$

g) $\frac{\square^{\square}}{6^4} = 6^{-1} = \frac{\square}{\square}$

k) $\frac{a^{\square}}{a^{\square}} = \square^{\square} = 1$

d) $\frac{2^5}{\square^{\square}} = 2^2$

h) $\frac{3^{15}}{3^{10}} = \square^{\square}$

l) $\frac{x^a}{x^b} = \square^{\square}$

6. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. Vean si hay resultados diferentes que sean correctos. Analicen los errores y corrijan lo necesario.

7. Los siguientes ejercicios están resueltos. Desarrollen en su cuaderno los procedimientos necesarios para verificar que los resultados son correctos. Si no lo son, corrijánlos.

$$(2^2)^{-3} = \frac{1}{64}$$

$$\left(\frac{2}{3^2}\right)^{-3} \times \left(\frac{2^2}{3^2}\right) = 3$$

$$\frac{2^4 \times 3^4}{6^2} = 6$$

$$(3^2)^3 \times (2 \times 3^5)^{-2} \times (3^2 \times 2)^2 = 1$$

8. Con apoyo de su maestro, revisen los procedimientos que emplearon en la actividad anterior y determinen qué resultados son correctos y cuáles no.

9. Resuelvan individualmente ésta y la siguiente actividad.

- a) $1^2 = \underline{\quad}$ c) $1^{25} = \underline{\quad}$ e) $2^1 = \underline{\quad}$ g) $25^1 = \underline{\quad}$ i) $2^0 = \underline{\quad}$ k) $25^0 = \underline{\quad}$
 b) $1^5 = \underline{\quad}$ d) $1^n = \underline{\quad}$ f) $5^1 = \underline{\quad}$ h) $n^1 = \underline{\quad}$ j) $5^0 = \underline{\quad}$ l) $n^0 = \underline{\quad}$



Afirmación	V	F
Si la base de una potencia es 1, el resultado es el exponente.		
Si el exponente de una potencia es 1, el resultado es la base.		
Si el exponente de una potencia es cero y la base no es cero, el resultado es 1.		

10. Anoten en la tabla si el enunciado es verdadero (V) o falso (F) y escriban un ejemplo en su cuaderno.

11. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Analicen los posibles errores y corrijan.

Sesión
4

■ Para terminar

¿Cuántos ceros después del uno?

Nombre del número	Notación decimal	Notación exponencial	Notación científica
Uno		10^0	1×10^0
Un mil			
Un millón			
	1 000 000 000		
			1×10^{12}
Un mil billones			
Un trillón			

1. Trabajen en equipo. Anoten lo que falta en la tabla y después contesten.

a) ¿Cuántos ceros después del 1 aparecen en la escritura decimal del cuatrillón? _____ ¿Cuál es la escritura decimal del cuatrillón?

b) La Tierra tiene una masa de seis cuatrillones de gramos. Anoten la masa de la Tierra en:

Notación decimal: _____

Notación exponencial: _____

Número	¿Es notación científica?
1.5×10^{-3}	
$2.8 \times 10^{\frac{1}{2}}$	
0.6×10^3	
15×10^{-4}	

c) ¿Cuántos ceros después del uno tiene el millón? _____

d) ¿Cuántos ceros más que el millón tiene el billón? _____

e) ¿Cuántos ceros más que el billón tiene el trillón? _____

2. En la secuencia 15 de este volumen estudiaron la notación científica, que es una manera de expresar números muy grandes o muy pequeños. Anoten lo que falta en la tabla y escriban en su cuaderno por qué lo son.

3. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y corrijan si es necesario.



La notación científica se usa para representar cantidades muy grandes o muy pequeñas. En la expresión $a \times 10^n$, a es un número decimal mayor o igual que 1 y menor que 10. El exponente es un número entero.

4. Completen individualmente la tabla.

5. Trabajen en equipo. Resuelvan los problemas.

- a) La distancia del planeta Venus al Sol es 1.082×10^8 km, mientras que la distancia de la Tierra al Sol es 1.49×10^8 km.

- ¿Cuál de los dos planetas está más cerca del Sol?

- ¿Cuántos kilómetros más cerca? _____

- b) Se estima que en una galaxia hay 1×10^{11} estrellas y que en el cosmos hay 1×10^{11} galaxias. ¿Cuántas estrellas se estima que hay en el cosmos? _____

- c) La velocidad de la luz es 3×10^8 m/s. Del Sol a la Tierra la luz tarda en llegar 5×10^2 s. ¿Cuál es la distancia del Sol a la Tierra? Expresen el resultado en notación científica. _____

- d) La siguiente tabla muestra el comportamiento de la deuda pública en México de 2012 a 2017.

Números grandes		Números pequeños	
Notación decimal	Notación científica	Notación decimal	Notación científica
80 000		0.00008	
45 000 000		0.00000045	
	2.7×10^9		2.7×10^{-9}
125 000 000 000 000		0.000000000000125	

Año	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Monto de la deuda pública (en pesos)	5.6×10^{12}	6.1×10^{12}	7.0×10^{12}	8.3×10^{12}	8.8×10^{12}	9.2×10^{12}

- ¿Cuánto mayor era la deuda pública en 2017 que en 2012? _____
- En 2017 había en México 1.2×10^8 habitantes. ¿Cuál era la deuda por habitante? _____

6. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y corrijan.

7. Utilicen el recurso informático *Crecimiento exponencial* para resolver algunas situaciones en las que se aplica este tipo de crecimiento. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/3m_b04_t04_s01-JS/index.html

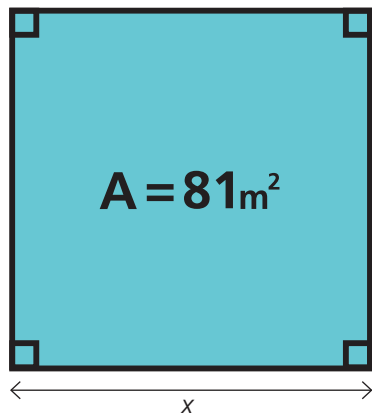


28. Raíz cuadrada de números positivos

Sesión

1

■ Para empezar



La raíz cuadrada permite resolver problemas prácticos, como calcular la medida del lado de un cuadrado conociendo su área, o la medida del radio de un círculo conociendo su área. Además, hay otros problemas en el campo de las matemáticas que se valen de la raíz cuadrada; por ejemplo, la resolución de ecuaciones de segundo grado y el cálculo de la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo cuando se conocen las medidas de los otros dos.

Esta secuencia es continuación de la secuencia 16; al estudiarla tendrás la posibilidad de profundizar tus conocimientos sobre la raíz cuadrada, tanto para efectuar la operación, como para usarla al resolver problemas.

La raíz entera y el resto

1. Realiza individualmente la siguiente actividad. A continuación aparecen los números naturales del 1 al 100. Tacha los que sean cuadrados perfectos y después contesta las preguntas.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

- a) ¿Cuántos números naturales, entre 1 y 100, son cuadrados perfectos? _____
- b) ¿Crees que entre 101 y 200 haya la misma cantidad de cuadrados perfectos? _____ Verifícalo en tu cuaderno. Luego, lee la siguiente información.



Se llaman *cuadrados perfectos* a los números que son resultado de elevar al cuadrado un número entero, o también a los números que tienen raíz cuadrada exacta. Por ejemplo: 64 es un número cuadrado perfecto porque resulta de elevar 8 al cuadrado, o bien porque su raíz cuadrada es 8 y no hay sobrante o resto.

■ Manos a la obra

2. Trabajen en pareja. Resuelvan los siguientes problemas.

a) Si se quieren plantar 172 rosales en un terreno cuadrado, de manera que en cada fila y en cada columna los rosales queden a un metro de distancia...

- ¿Cuántas filas de rosales habrá? _____
- ¿Sobrarán algunos rosales? _____ ¿Cuántos? _____

b) Para cubrir el piso de una sala cuadrada se utilizaron 256 losetas y no se tuvo que cortar ninguna...

- ¿Cuántas losetas se pusieron en cada fila? _____
- Si cada loseta mide 30 cm por lado, ¿cuánto mide un lado de la sala? _____

3. Al calcular la raíz cuadrada de algunos números se obtuvieron los resultados que se indican. Anoten sobre cada línea el número que corresponde y verifiquen en su cuaderno que los datos sean correctos.

a) Raíz 7, resto 14

b) Raíz 12, resto 24

c) Raíz 15, resto 32

4. Realicen en pareja el siguiente juego. Para ello, indiquen a su compañero lo siguiente:

- Piensa un número.
- Elévalo al cuadrado.
- Súmale el doble del número que pensaste.
- Súmale 1.
- Después de realizar las operaciones anteriores, pregunten a su compañero qué resultado obtuvo. La raíz cuadrada de ese resultado, menos 1, es el número que pensó su pareja. Realicen varias veces el juego y traten de explicar por qué sucede.



5. Completen la siguiente tabla.

Número	Raíz entera	Resto	Doble de la raíz más 1
99			
231			
1 456			
44 099			

6. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Verifiquen en la tabla que en los cuatro casos el resto es menor que el doble de la raíz más 1.
7. Analicen la siguiente información con apoyo de su maestro y vean si coincide con lo que concluyeron en la actividad 6.

La raíz cuadrada de un número positivo que no es cuadrado perfecto tiene una parte entera y una parte decimal. Por ejemplo, la raíz cuadrada de 138 es 11.7473... La parte entera es 11 y la parte decimal 7473..., los puntos suspensivos indican que hay más cifras en la parte decimal.

Otra manera de expresar la raíz cuadrada de 138 es: parte entera 11 y resto 17.

El resto siempre es menor que el doble de la parte entera, más 1.

La medida del radio

1. Trabajen en equipo. Resuelvan el siguiente problema y luego completen el procedimiento.

René compró una cisterna de forma cilíndrica a la que le caben 2800 litros de agua. La altura de la cisterna mide 1.5 metros. ¿Cuánto mide su diámetro?

Fórmula del volumen del cilindro: $V = \text{área de la base} \times \text{altura} = \pi r^2 h$

Sustitución: $2800 \text{ dm}^3 = (\pi r^2) 15 \text{ dm}$

(2800 litros equivalen a 2800 dm^3 , para igualar términos convertimos 1.5 m en 15 dm).

Dividimos ambos miembros de la igualdad del paso anterior entre 15 dm:

$$\frac{2800 \text{ dm}^3}{15 \text{ dm}} = \frac{(\pi r^2) 15 \text{ dm}}{15 \text{ dm}}$$

Al efectuar las operaciones, obtenemos: $186.7 \text{ dm}^2 = \underline{\hspace{2cm}}$



Dividimos el resultado del paso anterior entre π para obtener el radio al cuadrado:

$$\frac{186.7 \text{ dm}^2}{\pi} =$$

Al efectuar las operaciones resulta: $\frac{186.7 \text{ dm}^2}{\pi} = r^2$, que equivale a $r^2 = 59.42 \text{ dm}^2$.

Obtenemos la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad:

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{59.42 \text{ dm}^2}$$

Al efectuar las operaciones resulta: $r =$ _____

Duplicamos el radio para obtener el diámetro:

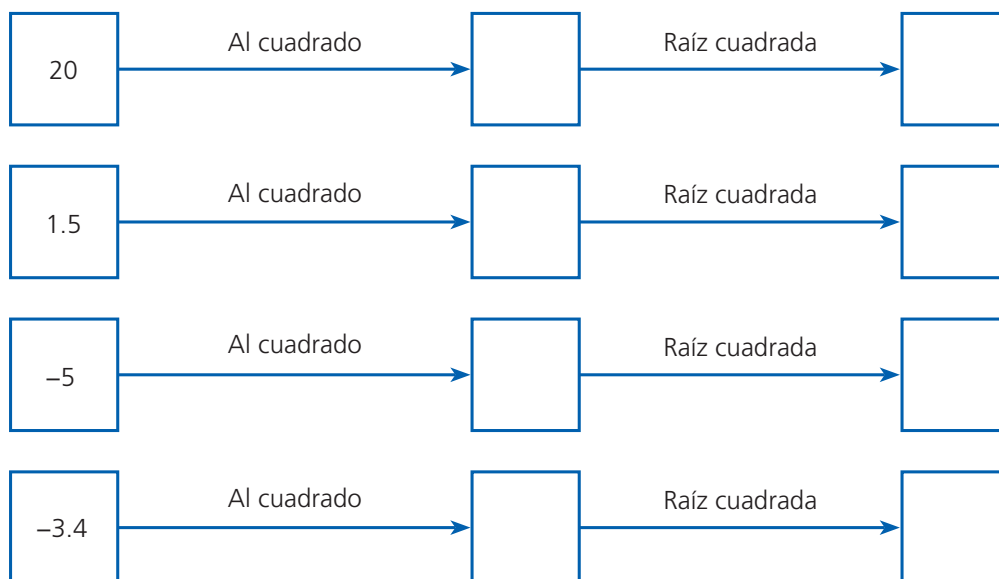
$$7.7 \text{ dm} \times 2 = \text{_____ dm} = \text{_____ m}$$

- Con apoyo de su maestro, analicen el procedimiento anterior. Comenten por qué, al dividir dm^3 entre dm , se obtiene dm^2 .
- Lean y comenten la siguiente información.

La raíz cuadrada permite simplificar ecuaciones en las que la incógnita está elevada al cuadrado, puesto que la raíz cuadrada es la operación inversa de elevar al cuadrado.

Por ejemplo, si $r^2 = 25$, entonces $r = \sqrt{25} = 5$. Si $c^2 = 30$, entonces $c = \sqrt{30} = 5.4$, aproximadamente.

- ¿Cuánto medirá el diámetro de una cisterna que tiene la misma altura que la cisterna de René, pero a la que le caben 5 000 litros de agua? _____
- Trabajen en pareja. Anoten los números que faltan en el esquema.



6. Anoten sobre la línea si el enunciado es falso o verdadero. Si consideran que es falso, den un ejemplo.
- a) Si un número positivo se eleva al cuadrado y al resultado se le extrae raíz cuadrada, se llega al número original. _____
- b) Si un número negativo se eleva al cuadrado y al resultado se le extrae raíz cuadrada, se llega al número original. _____
7. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. En caso de que no coincidan, averigüen quién tiene razón. Apóyense en la lectura de la siguiente información.

Si un número positivo se eleva al cuadrado y al resultado se le extrae raíz cuadrada, se obtiene el número original.

$$7^2 = 49 \text{ y } \sqrt{49} = 7$$

Verifiquen cómo esta ley no se cumple con los números negativos.



8. Observen el recurso audiovisual *La raíz cuadrada* para conocer más sobre su historia, su función y cómo obtener la parte entera y el resto.

■ Para terminar

Aproximación a la raíz cuadrada

1. Trabajen en pareja. Anteriormente estudiaron un procedimiento para encontrar la raíz cuadrada de un número mediante aproximaciones sucesivas. A continuación analizarán otro procedimiento para encontrar las cifras de la parte entera cuando se requiere calcular la raíz cuadrada de un número que no es cuadrado perfecto. Por ejemplo, encontrar la parte entera de $\sqrt{4528}$.
- a) Hay que determinar cuántas cifras tendrá la parte entera de la raíz. Comenten entre ustedes y con otros equipos por qué no es posible que tenga tres cifras.
- b) La parte entera de la raíz tiene dos cifras, por lo tanto, es de la forma $10a + b$. El término $10a$ representa las decenas y b representa las unidades. Eleven este número al cuadrado: $(10a + b)^2 = (10a + b)(10a + b) = \underline{\hspace{2cm}}$
- c) Para encontrar la cifra de las decenas, usamos el término $100a^2$ del resultado anterior. Encuentren esa cifra completando la primera tabla de la siguiente página.

¿Para qué valor de a el valor numérico de $100a^2$ es mayor que 4528? _____
 Esto significa que la mejor aproximación por defecto (esto es, por abajo de 4528) se produce cuando $a = 6$. Ésta es la cifra de las decenas de la parte entera que se busca.

d) Para encontrar la cifra de las unidades, utilizamos los términos $20ab + b^2$ de la expresión obtenida en el inciso b. Como ya se sabe que $a = 6$, se sustituye en la expresión anterior y se obtiene $120b + b^2$. Con esta expresión hay que aproximarnos a $4528 - 100a^2 = 4528 - 3600 = 928$. Encuentren la cifra de las unidades completando la segunda tabla.

¿Para qué valor de b , el término $120b + b^2$ es mayor que 928? _____ Esto significa que la mejor aproximación, por defecto, a 928, se produce cuando $b = 7$. Ésta es la cifra de las unidades de la parte entera de la raíz.

Valores de a	Valor numérico de $100a^2$	Comparación del valor numérico de $100a^2$ con 4528
1	$100 \times 1^2 = 100$	$100 < 4528$
2		
3		

Valores de b	Valor numérico de $120b + b^2$	Comparación del valor numérico de $120b + b^2$ con 928
0	$120 \times 0 + 0^2 = 0$	$0 < 928$
1		
2		

- Verifiquen en su cuaderno que 67 es la parte entera de la raíz cuadrada de 4528 que más se aproxima, e indiquen cuál es el resto.
- Trabajen en equipo para calcular la parte entera de la raíz cuadrada y el resto de los siguientes números.



a) $\sqrt{2827}$

b) $\sqrt{5392}$

c) $\sqrt{8721}$

- Resuelvan el siguiente problema.

Rosendo tiene 4865 losetas de 10 cm de ancho por 20 cm de largo. Quiere formar un cuadrado lo más grande posible, sin tener que cortar ninguna loseta.

- ¿Cuál sería el área del cuadrado? _____
- ¿Cuánto mediría por lado? _____
- ¿Cuántas losetas le sobrarían? _____

- Con el apoyo de su maestro, comparen sus resultados y corrijan los errores.



29. Sistemas de ecuaciones 2×2 . Método de suma y resta

Sesión
1

■ Para empezar



Luis presentó un examen para ingresar a un puesto de trabajo y su puntuación fue 9. El examen tenía 30 preguntas; cada acierto le generó 1 punto y cada error le restó 2 puntos. ¿Cuántas respuestas correctas tuvo y en cuántas se equivocó?

Este tipo de problemas originan un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x + y = 30$$

$$x - 2y = 9$$

Para resolver un sistema de ecuaciones como éste, anteriormente estudiaste los métodos gráfico, de sustitución y de igualación. Ahora conocerás otro método llamado *de suma y resta*, *de reducción*, o bien *de eliminación*. Así, cuando tengas que resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, podrás recurrir al método que más te convenga.

Reducción de incógnitas

1. Trabaja de manera individual.

a) Resuelve las siguientes operaciones:

• $(5a - 3b + m) - (-a - 2b + 3m) =$ _____

• $(7a + 4b) - (2a + 2b - 3c) =$ _____

• $(4x + 8y) + (4x - 7y) =$ _____

• $(-5x + 2y) - (5x - 10y) =$ _____

b) Encierra en un círculo la ecuación o expresión algebraica que es equivalente a la que aparece en color. Luego, explica en tu cuaderno por qué las otras ecuaciones no son equivalentes.

$$2x - 6y = -8$$

$$6x - 6y = -24$$

$$6x - 18y = -24$$

$$6x - 18y = -8$$



$$-3x - 2y = 12$$

$$-21x - 14y = 12$$

$$-21x - 14y = 84$$

$$-3x - 14y = -84$$

2. En grupo, y con apoyo de su maestro, compartan sus respuestas. Si tienen dudas, vuelvan a consultar las secuencias donde estudiaron cómo resolver sumas y restas de términos semejantes y en las que obtuvieron expresiones equivalentes.

■ Manos a la obra

3. Trabajen en pareja. En sus cuadernos resuelvan el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método gráfico.

$$\text{Ecuación 1: } 3a + b = 22$$

$$\text{Ecuación 2: } 4a - 3b = -1$$

- a) ¿Se intersecaron las dos rectas? _____ ¿En qué punto? _____
b) Por lo tanto, los valores de a y b son: _____ y _____, respectivamente.
4. Analicen los siguientes pasos del método de reducción, también denominado *de suma y resta*, para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- 1° Se deben obtener coeficientes simétricos u opuestos para una de las incógnitas en las dos ecuaciones, por ejemplo, los coeficientes de b .

Como el coeficiente de b en la **ecuación 1** es $+1$ y en la **ecuación 2** es -3 , se puede multiplicar la primera ecuación por 3 , de donde se obtiene la siguiente ecuación equivalente:

$$9a + 3b = 66$$

- 2° Se suman miembro a miembro las ecuaciones y se reducen los términos semejantes:

$$\begin{array}{r} 9a + 3b = 66 \\ 4a - 3b = -1 \\ \hline 13a \quad = 65 \end{array}$$

- 3° Se resuelve la ecuación resultante para obtener el valor de a :

$$13a = 65 \longrightarrow a = \frac{65}{13} \longrightarrow a = 5$$

- 4° El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones originales para calcular el valor de la otra incógnita:

$$3(5) + b = 22 \longrightarrow b = 22 - 15 \longrightarrow b = 7$$



5° Finalmente, se comprueba que los valores obtenidos sirven para hacer verdaderas ambas ecuaciones:

Ecuación 1: $3a + b = 22$

$$3(5) + (7) = 22$$

$$15 + 7 = 22$$

$$22 = 22$$

Ecuación 2: $4a - 3b = -1$

$$4(5) - 3(7) = -1$$

$$20 - 21 = -1$$

$$-1 = -1$$

¿Los valores de a y de b son los mismos que los que obtuvieron por el método gráfico? _____

5. Ahora prueben resolver el mismo sistema de ecuaciones en su cuaderno, pero buscando coeficientes simétricos de a .
6. Contesten las siguientes preguntas.
 - a) ¿Cómo decidieron por cuál número multiplicar los coeficientes? _____

 - b) ¿Qué operación emplearon para reducir los términos semejantes? _____

 - c) ¿Obtuvieron los mismos resultados para ambas incógnitas que cuando se despejó b ? _____
7. En grupo y con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

Para resolver un sistema de ecuaciones por el **método de reducción, o de suma y resta**, se multiplica una o las dos ecuaciones por un número que permita obtener coeficientes simétricos de cualquiera de las dos literales.

Después, se suman miembro a miembro las ecuaciones y se reducen los términos semejantes. El propósito es obtener una ecuación de primer grado, o lineal, con una sola incógnita.

El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones originales para obtener el valor de la otra incógnita.

Más sistemas de ecuaciones



1. Resuelvan en pareja los siguientes problemas mediante el método de reducción o de suma y resta.

a) Luis tiene una joyería; hoy vendió 6 pulseras de plata y 5 de oro. Por la venta, obtuvo \$13 000. Si una pulsera de oro cuesta cuatro veces lo que cuesta una de plata, ¿cuál es el precio de una pulsera de cada clase? _____

- ¿Cuáles son las incógnitas de este problema? _____ y _____
- Si x = valor de la pulsera de oro, y = valor de la pulsera de plata, encierren en un círculo el sistema de ecuaciones que representa el problema.

$$5x + 6y = 13\,000$$

$$x + y = 4$$

$$6x + 5y = 13\,000$$

$$x + 4y = 1$$

$$5x + 6y = 13\,000$$

$$4y = x$$

- Expliquen por qué los otros dos sistemas no representan el problema.

- ¿El coeficiente de qué incógnita les conviene trabajar? _____
- Resuelvan en su cuaderno el sistema de ecuaciones que eligieron por el método de suma y resta, y regresen a responder la pregunta del problema.
- Comprueben que los valores obtenidos hacen verdaderas las dos ecuaciones.

b) Doña Lucila tiene un terreno donde cría gallinas y puercos. En total tiene 45 animales. Si la cantidad de patas de todos los animales es 120, ¿cuántas gallinas y cuántos puercos cría doña Lucila? _____

- Si se representa con x la cantidad de gallinas y con y la cantidad de puercos, ¿cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones corresponde al problema? Enciérrenlo en un círculo.

$$x + y = 45$$

$$4x + 2y = 120$$

$$x + y = 45$$

$$2x + 4y = 120$$

$$x - y = 45$$

$$4x - 2y = 120$$

- Expliquen por qué los otros dos sistemas no representan el problema.

- Resuelvan en su cuaderno el sistema que eligieron usando el método de reducción, también conocido como *de suma y resta*.
- Comprueben que los valores obtenidos son válidos para las dos ecuaciones; si son correctos, respondan la pregunta del problema.

c) Se tienen dos números cuya suma es cero. Si al primer número se le suma 15, se obtiene el doble del segundo. ¿Qué números son? _____



- Encierren en un círculo el sistema de ecuaciones que representa este problema.

$$x + y = 0$$

$$x + y = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x + 2y = 15$$

$$x + 15 = 2y$$

$$2x - y = 15$$

- ¿Es necesario multiplicar una o ambas ecuaciones para obtener los coeficientes simétricos de una de las incógnitas? _____ ¿Por qué? _____

d) Resuelvan en su cuaderno el sistema con el método de reducción. No olviden comprobar los valores obtenidos y respondan el problema.

2. Comparen sus resultados con otra pareja. Si tienen dudas en algunos de los pasos del método de reducción, revisen en el grupo, apoyados por el maestro, el trabajo hecho en la sesión 1.

■ Para terminar

Más problemas con sistemas de ecuaciones

1. Resuelve individualmente y en tu cuaderno el siguiente sistema de ecuaciones por el método de suma y resta.

Ecuación 1: $5x - 2y = 9$

Ecuación 2: $x + 2y = 9$

- a) ¿Es necesario multiplicar alguna ecuación para obtener coeficientes simétricos de alguna literal? _____ ¿Por qué? _____

- b) Comprueba que los valores obtenidos cumplen con las ecuaciones.

2. En grupo, comparen sus resultados. Si hay alguna diferencia, revisen sus procedimientos, analicen a qué se debieron y corrijan si es necesario.
3. En equipo resuelvan el siguiente sistema de ecuaciones por los cuatro métodos que estudiaron (gráfico, de sustitución, de igualación y de reducción o suma y resta).

Ecuación 1: $5x + 4y = 26$

Ecuación 2: $x + 2y = 10$

- a) ¿Cuál método les resultó más conveniente para resolverlo? _____
Justifiquen su respuesta. _____

4. Observen el recurso audiovisual *Método de suma y resta, otra opción para resolver sistemas de ecuaciones* para que puedan comparar los cuatro métodos que han aprendido.



5. En equipo, analicen los siguientes problemas. Decidan qué método les parece más adecuado y expliquen por qué. Después, resuelvan en su cuaderno el sistema de ecuaciones y anoten la respuesta de cada problema.



- a) La suma de las edades de Edna y Juan es 82. Edna es mayor que Juan por 18 años.

Edad de Edna: _____

Edad de Juan: _____

- b) El museo de la caricatura tuvo 440 visitantes el día de hoy (hombres y mujeres). Si la razón entre hombres y mujeres es de $\frac{3}{5}$, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres asistieron?

Hombres: _____

Mujeres: _____

- c) Si se suma 7 al numerador y al denominador de una determinada fracción, se obtiene la fracción $\frac{4}{5}$. Si se resta 2 al numerador y al denominador, se obtiene la fracción $\frac{1}{2}$, ¿cuál es la fracción original? _____

6. En grupo y con ayuda de su maestro, comparen sus resultados y los métodos que utilizaron en cada equipo. Escuchen y analicen los argumentos de cada equipo para justificar la elección que hicieron.

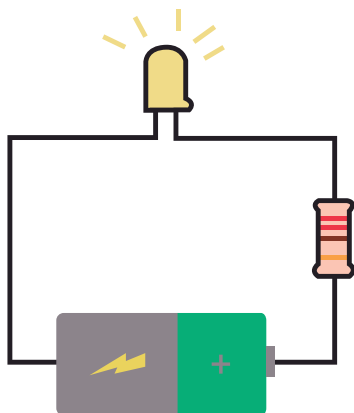
7. Utilicen el recurso informático *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 2* para resolver otros problemas que implican un sistema de dos ecuaciones lineales de dos incógnitas y continuar aplicando los métodos de resolución.



30. Relación funcional 2

Sesión
1

■ Para empezar



Cuando oprimes el interruptor de la luz, se prende o se apaga el foco. Esto se debe a un sistema de ingeniería eléctrica que se construyó a partir de cálculos complejos.

La imagen muestra un circuito básico al que se le aplica voltaje con una pila; el circuito está formado por una resistencia y un foco pequeño. La cantidad de corriente que pasa y que permite que el foco se prenda sin fundirse depende del voltaje y de la resistencia. ¿Cómo es esta dependencia?, ¿tendrá que ver con la variación proporcional?, ¿será directa o inversa?

En esta secuencia estudiarás este y otros fenómenos de la física sobre los diferentes tipos de variación a partir de sus tablas, gráficas y expresiones algebraicas.

■ Manos a la obra

A mayor velocidad, menor tiempo

1. Resuelvan en equipos las actividades de la siguiente sesión.

Bruno viajará en carretera de la Ciudad de México a San Luis Potosí. La distancia entre ambas ciudades es de 417 km, aproximadamente. La siguiente tabla representa la distancia que Bruno recorre hacia algunos puntos intermedios por los que pasará. Complétenla y ubiquen los valores de la distancia recorrida (x) y la distancia que falta recorrer (y) en la gráfica.

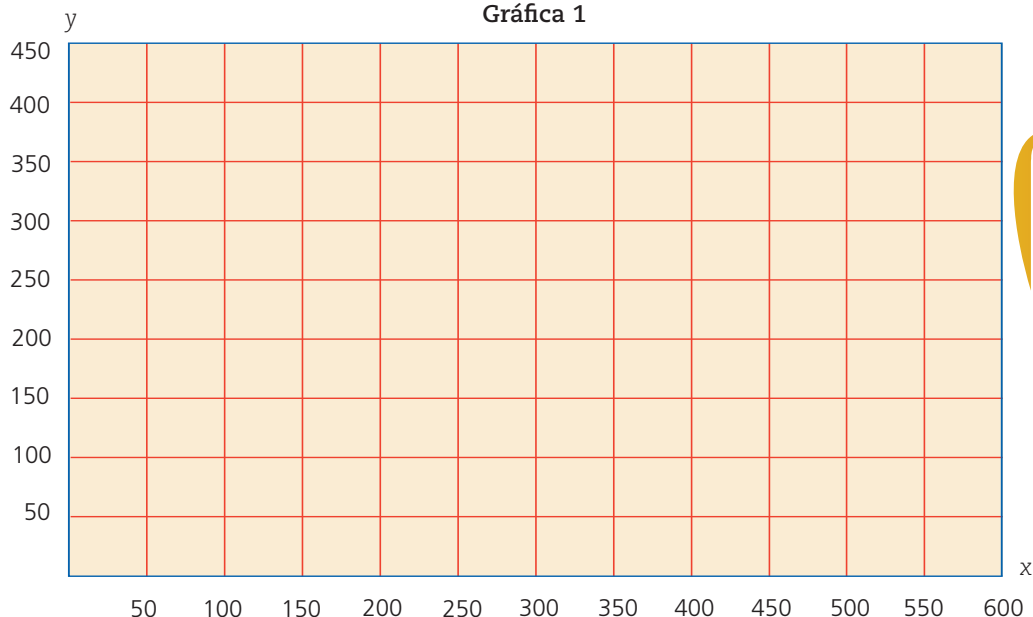
Tabla 1

Lugar al que llegará	Tepeji del Río	San Juan del Río	Pedro Escobedo	Querétaro	San Luis Potosí
Distancia recorrida en km (x)	76	131	174	205	417
Distancia que falta recorrer en km (y)					

Escriban una expresión algebraica que relacione los valores de las variables.



Gráfica 1



Dato interesante

La generación de energía eléctrica inició en México en 1879 en León, Guanajuato, con la planta generadora de la fábrica textil La Americana.

2. Algunos aspectos que también se pueden analizar a partir del viaje que Bruno realiza son: el tiempo que tarda en llegar de acuerdo con la velocidad promedio a la que circule en su recorrido y la distancia que recorre en diferentes momentos considerando una velocidad constante. Completen las tablas 2 y 3. Tracen en su cuaderno las gráficas correspondientes.

Tabla 2

Considerar distancia constante de 417 km						
Velocidad promedio (v)	40 km/h	80 km/h	90 km/h	95 km/h	110 km/h	120 km/h
Tiempo en horas que tardará en llegar (t)						

Tabla 3

Considerar una velocidad constante de 80 kilómetros por hora							
Tiempo que hará en horas (t)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	3	4
Distancia recorrida (km) (d)							

a) ¿Qué sucede en cada gráfica cuando se acerca al origen?

Gráfica 2	Gráfica 3

b) Escriban una expresión algebraica que relacione las variables en cada caso.

Expresión algebraica 1	Expresión algebraica 2



3. Comparen sus respuestas y las gráficas que hicieron con las de sus compañeros. Revisen que las expresiones algebraicas que obtuvo cada equipo sean iguales o equivalentes en cada caso y contesten en su cuaderno las siguientes preguntas.

 - a) ¿La gráfica crece o decrece? Si ocurre, ¿en qué intervalos?
 - b) Si hay más de un intervalo en que crece o decrece, ¿en cuál es más rápido?
 - c) ¿La gráfica corta alguno de los ejes? ¿Cuál y en qué punto?
 - d) ¿Qué significado tiene esto en el contexto de la situación que representa?
 - e) ¿Cuál es la relación que describen en cada caso? ¿Cómo lo supieron?
4. En grupo y con ayuda de su maestro, comparen sus respuestas. Después, lean la siguiente información.

La gráfica que corresponde a una relación de variación directamente proporcional es una *línea recta que siempre pasa por el origen*.

a) La expresión general que representa una variación directamente proporcional es: $y = kx$.

La gráfica de una variación que es inversamente proporcional es una curva que se llama *hipérbola*.

b) La expresión general que representa una variación inversamente proporcional es: $k = xy$.



5. Utilicen el recurso audiovisual *Tablas, expresiones algebraicas y gráficas* para conocer otros ejemplos que les permitan comprender la forma en que se vinculan estas tres representaciones para analizar qué tipo de variación existe entre dos variables.

Sesión 2

Circuito eléctrico

1. Trabajen en pareja. El siguiente esquema pertenece a un circuito eléctrico básico.

 - La *pila* aplica un *voltaje* que provoca que la corriente eléctrica *circule alrededor* de un circuito.
 - La resistencia se conecta al circuito para cambiar la *intensidad* de la corriente eléctrica.
 - La resistencia del circuito se mide en ohmios, y la corriente que circula por el circuito se mide en amperes.

En un circuito con una resistencia (R) de 15 ohmios se aplicaron diferentes voltajes. Al medir la corriente eléctrica se obtuvieron los siguientes resultados. Analicen la relación entre voltaje (V) y corriente eléctrica (I), y completen la tabla.

Voltaje, V (en volts)	10	15	20	25	32	45	V
Corriente eléctrica, I (en amperes)	150	225	300	375			

