Matemáticas

Segundo grado. Volumen II

TELEsecundaria

Matemáticas

Segundo grado
Volumen II

SEP
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

TELEsecundaria

Matemáticas. Segundo grado. Telesecundaria. Volumen II fue elaborado y editado por la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública.

Coordinación de autores
Olga Leticia López Escudero

Autores
Hugo Hipólito Balbuena Corro, Silvia García Peña,
Olga Leticia López Escudero

Coordinación de contenidos
María del Carmen Larios Lozano

Supervisión de contenidos
José Alfredo Rutz Machorro, Jessica Evelyn Caballero Valenzuela,
Juanita Espinoza Estrada, Esperanza Issa González,
María Luisa Luna Díaz

Revisión técnico-pedagógica
Teresa de Jesús Mezo Peniche, Óscar Alfredo Palmas Velasco

Coordinación editorial
Raúl Godínez Cortés

Supervisión editorial
Jessica Mariana Ortega Rodríguez

Cuidado de la edición
Humberto Xocoyotzin Calles Guerrero

Lectura
María Fernanda Heredia Rojas

Producción editorial
Martín Aguilar Gallegos

Iconografía
Diana Mayén Pérez, Irene León Coxtinica,
Emmanuel Adamez Téllez

Portada
Diseño: Martín Aguilar Gallegos
Iconografía: Irene León Coxtinica
Imagen: *Los cargadores* (detalle), 1923-1924, Jean Charlot (1898-1979), fresco, 4.69 × 2.30 m, ubicado en el Patio de las Fiestas, planta baja, D. R. © Secretaría de Educación Pública, Dirección General de Proyectos Editoriales y Culturales/fotografía de Gerardo Landa Rojano; reproducción autorizada por el Instituto Nacional de Bellas Artes y Literatura, 2019; D. R. © Sociedad Mexicana de Autores de las Artes Plásticas.

Servicios editoriales
Solar, Servicios Editoriales, S. A. de C. V

Coordinación
Elizabeth González González

Formación
Víctor Daniel Abarca Hernández, Rosa Virginia Cruz Cruz

Diseño
Roberto Ángel Flores Angulo

Ilustración
Sergio Palomino Gámez, Carolina Tovar González, David Nuñez Bahena,
Brian González

Primera edición, 2019. Ciclo escolar 2019-2020

ISBN: 978-607-551-291-4

Impreso en México
Distribución gratuita. Prohibida su venta

En los materiales dirigidos a las alumnas y los alumnos de Telesecundaria, la Secretaría de Educación Pública (SEP) emplea los términos: alumno(s), maestro(s) y padres de familia aludiendo a ambos géneros, con la finalidad de facilitar la lectura. Sin embargo, este criterio editorial no demerita los compromisos que la SEP asume en cada una de las acciones encaminadas a consolidar la equidad de género.

Presentación

Este libro fue elaborado para cumplir con el anhelo compartido de que en el país se ofrezca una educación con equidad y calidad, en la que todos los alumnos aprendan, sin importar su origen, su condición personal, económica o social, y en la que se promueva una formación centrada en la dignidad humana, la solidaridad, el amor a la patria, el respeto y cuidado de la salud, así como la preservación del medio ambiente.

El uso de este libro, articulado con los recursos audiovisuales e informáticos del portal de Telesecundaria, propicia la adquisición autónoma de conocimientos relevantes y el desarrollo de habilidades y actitudes encaminadas hacia el aprendizaje permanente. Su estructura obedece a las necesidades propias de los alumnos de la modalidad de Telesecundaria y a los contextos en que se desenvuelven. Además, moviliza los aprendizajes con el apoyo de materiales didácticos presentados en diversos soportes y con fines didácticos diferenciados; promueve la interdisciplinariedad y establece nuevos modos de interacción.

En su elaboración han participado alumnos, maestras y maestros, autoridades escolares, padres de familia, investigadores y académicos; su participación hizo posible que este libro llegue a las manos de todos los estudiantes de esta modalidad en el país. Con las opiniones y propuestas de mejora que surjan del uso de esta obra en el aula se enriquecerán sus contenidos, por lo mismo los invitamos a compartir sus observaciones y sugerencias a la Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública y al correo electrónico: librosdetexto@nube.sep.gob.mx.

Índice

Conoce tu libro

El libro que tienes en tus manos fue elaborado especialmente para ti. Junto con tus compañeros y el apoyo de tu maestro, irás construyendo un saber matemático que se convertirá en una poderosa herramienta para que puedas resolver una diversidad de problemas cotidianos.

Tu libro está organizado de la siguiente manera:

Entrada de bloque

Al inicio de cada bloque se presenta una ilustración acompañada de un texto, que aluden a la importancia de los conocimientos matemáticos que estudiarás en diversos ámbitos de la vida.

Para empezar

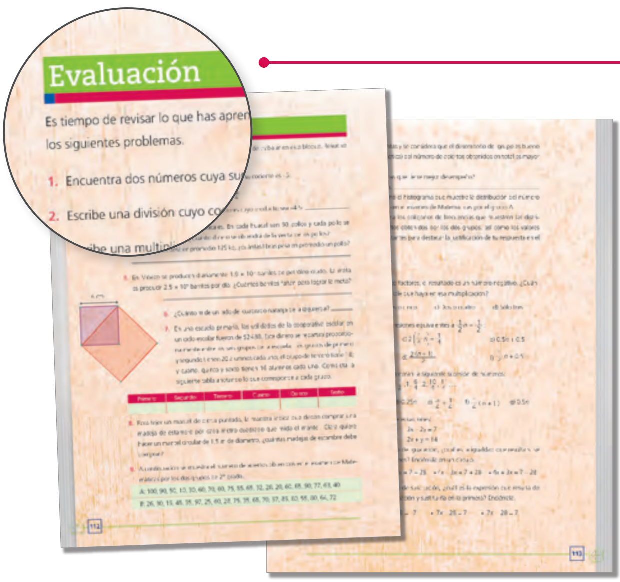
Te proporciona un acercamiento a los conocimientos que aprenderás, mediante situaciones matemáticas o cotidianas.

Manos a la obra

Te ofrece una serie de actividades que te permitirán trabajar y aprender los contenidos.

Para terminar

Contiene actividades para reflexionar, revisar, recuperar y hacer conclusiones sobre los temas estudiados.

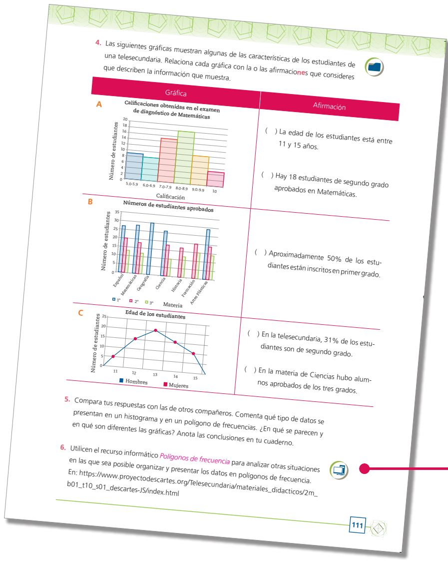


Evaluación

Al final de cada bloque se presentan actividades de evaluación que te ayudarán a valorar el logro de tus aprendizajes.

Recursos informáticos

Con esta herramienta tendrás oportunidad de practicar los procedimientos y aplicar los conceptos que aprendiste, a través de un ambiente digital interactivo.



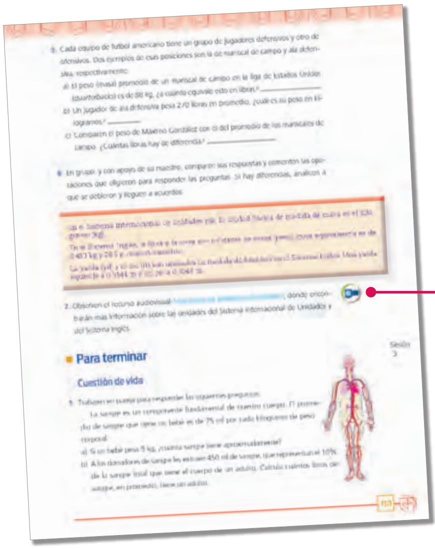
4. Las siguientes gráficas muestran algunas de las características de los estudiantes de una telesecundaria. Relaciona cada gráfica con la o las afirmaciones que consideres que describen la información que muestra.

Gráfica	Afirmación
A. Calificaciones obtenidas en el examen de diagnóstico de Matemáticas	( ) La edad de los estudiantes está entre 11 y 15 años. ( ) Hay 18 estudiantes de segundo grado aprobados en Matemáticas.
B. Números de estudiantes aprobados	( ) Aproximadamente 50% de los estudiantes están inscritos en primer grado.
C. Edad de los estudiantes	( ) En la telesecundaria, 31% de los estudiantes son de segundo grado. ( ) En la materia de Ciencias hubo alumnos aprobados de los tres grados.

5. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenta qué tipo de datos se presentan en un histograma y en un polígono de frecuencias. ¿En qué se parecen y en qué son diferentes las gráficas? Anota las conclusiones en tu cuaderno.

6. Utilicen el recurso informático *Polígonos de frecuencia* para analizar otras situaciones en las que sea posible organizar y presentar los datos en polígonos de frecuencia. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t10_s01_descartes-JS/index.html

111

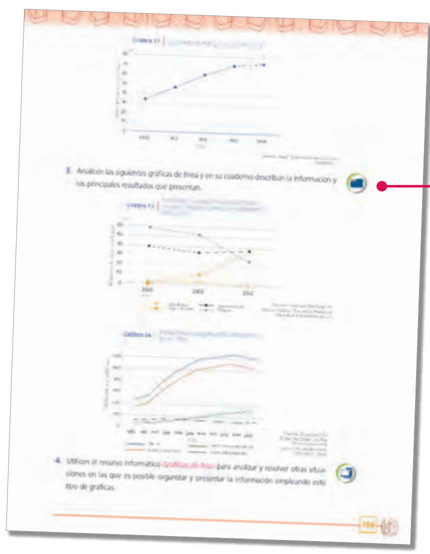


Para terminar

Cuestión de vida

Recursos audiovisuales

Te permiten profundizar, complementar e integrar lo que estás estudiando. Para verlos sólo tienes que conectarte a tu Portal de Telesecundaria.

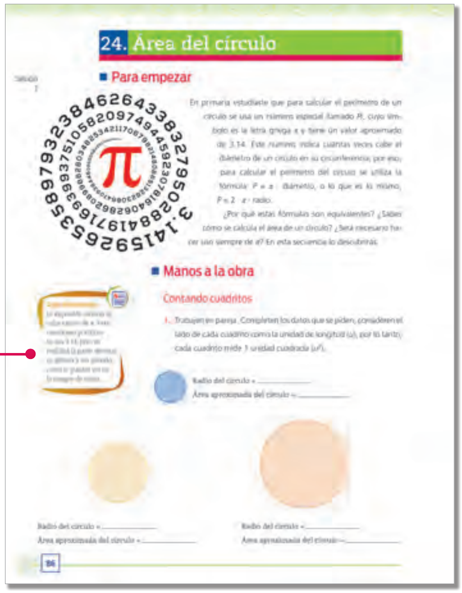


Carpeta

A lo largo del libro hay determinados ejercicios que se señalan con este ícono, a fin de que tengas un registro de tu avance en el dominio y conocimiento de los temas de la asignatura.

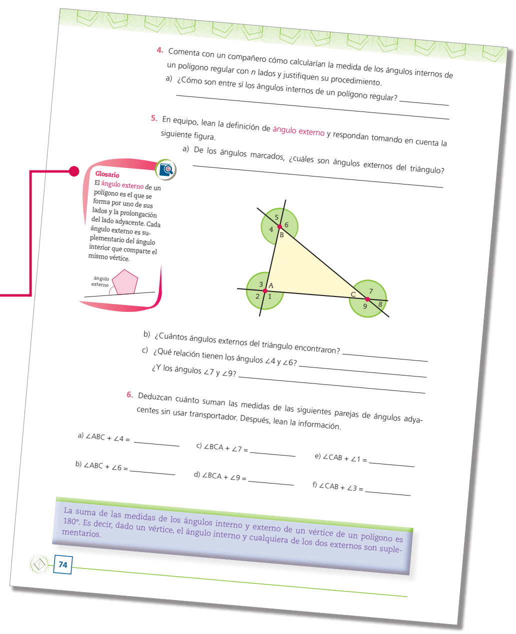
Secciones de apoyo

Se trata de textos breves que te ofrecen información que enriquece el contenido del libro o que te ayudarán a comprenderlo mejor:



Dato interesante

Glosario



Bloque 2

La potencia de la matemática y el ajedrez

Cuenta la leyenda que el ajedrez se inventó en la India y que el rey quedó tan maravillado que ofreció pagar lo que fuera para tenerlo. El creador pidió entonces un grano de trigo por el primer recuadro del juego, dos por el segundo, cuatro por el tercero, y que se fuese duplicando la cantidad de trigo hasta haber cubierto el tablero. Ni con toda la cosecha de la India pudieron pagarle. ¿Podrías calcular cuántos granos de trigo pedía por el invento?

13. Multiplicación y división de números enteros

Sesión 1

Para empezar

Fabiola y Alonso juegan a lanzar dos dados. Si el que lanza los dados obtiene una suma diferente de 7, gana esos puntos. Si obtiene una suma de 7, pierde 7 puntos y los representa como negativos. Al finalizar el juego, la puntuación fue la siguiente:

Fabiola	124 y –63
Alonso	96 y –56

¿Cuántas veces perdió puntos Fabiola? ¿Cuántas veces perdió puntos Alonso?

En esta secuencia realizarás operaciones que permitan responder estas preguntas y verás qué sucede con el signo del resultado.

Puntos a favor o en contra

1. Trabajen en pareja. Completen los datos de la tabla y anoten en la última columna quién ganó, considerando que en los renglones se encuentran los resultados de cada pareja.

Jugador	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntuación	Jugador	Puntos a favor	Puntos en contra	Puntuación	¿Quién ganó?
A	75	8(–7) =		B	83	9(–7) =		
C	68	10(–7) =		D	40	6(–7) =		
E	59	8(–7) =		F	75	11(–7) =		
G	93	5(–7) =		H	92	5(–7) =		
I	48	12(–7) =		J	117	10(–7) =		

2. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Comenten el signo que tiene el producto que se obtiene al multiplicar un número positivo por otro negativo.

Manos a la obra

3. Trabajen en pareja. Anoten los datos que faltan en la tabla.

Número	–24	18						–7	n
Doble			–10				–2		
Triple				–36		51			
Mitad					–8				

4. Escriban en cada fila dos factores cuyo producto (resultado) sea el que se muestra en la primera columna. Puede haber más de una respuesta correcta.

Producto	Multiplicaciones de dos factores
a) –8 =	
b) 45 =	
c) 0 =	
d) –42 =	
e) –13 =	
f) 72 =	
g) 81 =	
h) –25 =	

5. Escriban en cada fila tres divisiones que den el cociente (resultado) que se indica en la primera columna.

Cociente	División
a) –7 =	
b) –9 =	
c) 15 =	
d) –11 =	
e) –18 =	
f) 32 =	
g) –1 =	
h) –27 =	

6. En cada fila, subrayen la operación que tiene un resultado diferente a todas las demás.

• (–6) (8)	• (4) (–12)	• (–3) (–16)	• (–2) (24)	• (48) (–1)
• (–10) ÷ (–2)	• 20 ÷ 4	• (–5) ÷ (–1)	• (–1) (–5)	• (–15) ÷ (3)
• (–12) ÷ (–2)	• (3) (–2)	• 6 ÷ (–1)	• (–6) ÷ 1	• 72 ÷ (–12)
• (–2) (–2)	• (–2) + (–2)	• (–8) ÷ (2)	• (–2) – (2)	• 8 ÷ (–2)

7. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados con otra pareja. Cuando no sean iguales, revisen sus procedimientos y corrijan lo necesario.

Sesión 2

Más de dos factores

1. Trabajen en pareja. Realicen las siguientes multiplicaciones.

a) (–3) (–5) = ____________

b) (–6) (8) = ____________

c) (–3) (–5) (1) = ____________

d) (–6) (–8) (–1) = ____________

e) (–2) (–3) (–4) (–5) = ____________

f) (–1) (–2) (–3) (4) = ____________

g) (–1) (–2) (–3) (–4) (–5) = ____________

h) (–1) (–2) (–3) (–4) (5) = ____________

2. Anoten cuatro multiplicaciones de cuatro factores, dos con resultado positivo y otras dos con resultado negativo.

a)

b)

c)

d)

3. Anoten otras cuatro multiplicaciones con más de dos factores; pueden ser tres, cuatro, cinco o más. Dos de las multiplicaciones deben tener resultado positivo y las otras dos, negativo.

a)

b)

c)

d)

4. Anoten una conclusión que exprese cuándo una multiplicación de más de dos factores tiene resultado positivo y cuándo tiene resultado negativo.

____

____

____

5. En grupo y con apoyo del maestro, comparen sus resultados y revisen sus conclusiones. Comprueben si éstas expresan lo mismo, aunque con diferentes palabras. Después analicen la siguiente operación y digan, sin resolverla, si el producto será positivo o negativo: $(-1)(-2)(-3)(4)(-5)(-6)(-7)(-8)(-9)$

6. Registra individualmente el resultado que se obtiene al sustituir las siguientes literales por los valores correspondientes.

a	b	c	abc	$a(b + c)$	$ac(-1)$
–2	–5	–3			
3	4	–2			
4	–3	–2			
–6	2	–1			
3	–7	4			

7. En grupo y con apoyo del maestro, comparen sus respuestas, analicen los errores y corrijan lo necesario.

8. Obtengan el resultado de las operaciones.

a) $(-5)(4)(-1) =$ ______

b) $(-75) \div 15 =$ ______

c) $-7(3 + 5) =$ ______

d) $-8(6 - 7) =$ ______

e) $40 \div (13 - 10) =$ ______

f) $(-6)(-5)(-4)(-3)(-2) =$ ______

9. Marquen con una palomita (✓) si el enunciado es verdadero (V) o falso (F) a partir de los resultados anteriores.

Enunciado	V	F
a) Si en una multiplicación hay un número par de factores negativos, el resultado es negativo.		
b) Si en una multiplicación hay un número impar de factores negativos, el resultado es positivo.		
c) Si en una multiplicación sólo hay factores negativos, el resultado puede ser positivo o negativo.		

Para terminar

Por cada multiplicación, dos divisiones

1. Trabajen en pareja. Anoten el factor que falta en las siguientes multiplicaciones.

a) 7(   ) = 56

b) (   )25 = –100

c) 8(   ) = –280

d) (   )14 = –644

e) –20(   ) = 300

f) (   ) (–75) = 1 875

2. Utilizando los números de cada multiplicación de la actividad anterior, escriban dos divisiones. Utilicen como guía el primer renglón.

Multiplicación	Primera división	Segunda división
7(8) = 56	56 ÷ 7 = 8	56 ÷ 8 = 7
( )25 = –100		
8( ) = –280		
( )14 = –644		
–20( ) = 300		
( ) (–75) = 1 875		

3. Usen los números –12, –7 y 84 para formular una multiplicación y dos divisiones. Anótenlas en los espacios que corresponden.

Multiplicación	Primera división	Segunda división

4. Marquen con una palomita (✓) si el enunciado es verdadero (V) o falso (F).

Enunciado	V	F
a) El cociente de dos números negativos es negativo.		
b) El cociente de dos números, uno positivo y otro negativo, es negativo.		

5. Escriban los números que faltan en la tabla.

×		4	–6	–2	–1	5	*n*
8	–24						
			–84				
						–75	
–*m*							

6. Con apoyo del maestro, comparen sus resultados, analicen si tuvieron errores y corrijan. Después lean la siguiente información.

La regla de los signos de la multiplicación de números enteros se enuncia de la siguiente manera:

- El producto de dos números enteros, uno positivo y otro negativo, es un número entero negativo.
- El producto de dos números enteros negativos o dos números enteros positivos es un número entero positivo.
- El producto de un número entero, positivo o negativo, por –1, es el opuesto del número.

Esta misma regla es válida para la división de dos números enteros.

7. De manera individual, resuelve los siguientes problemas.
   a) Pensé un número, lo multipliqué por 7 y al resultado le sumé –4. Obtuve –25. ¿Qué número pensé? ____________
   b) Pensé un número, lo dividí entre –3 y al resultado le resté –8. Obtuve 7. ¿Qué número pensé? ____________

8. Encuentra dos números que sumados den –12 y multiplicados den 35. Los números buscados son: ____________ y ____________
   Encuentra dos números que sumados den –6 y multiplicados den –27. Los números buscados son: ____________ y ____________

9. Con apoyo del maestro, comparen sus respuestas; en caso de que no coincidan, averigüen a qué se debe y corrijan.

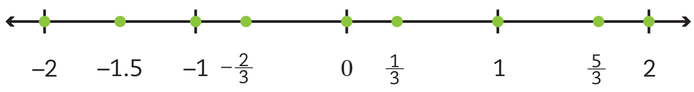
10. Observen el recurso audiovisual *Multiplicación de más de dos números enteros* y analicen los ejemplos que se les presentan.

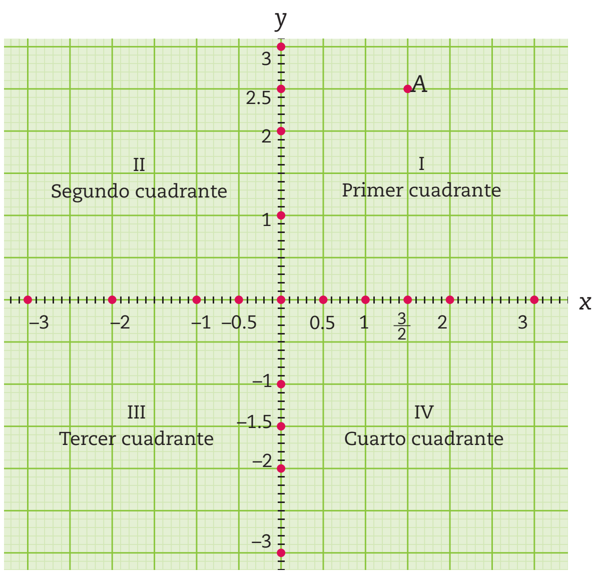
14. Multiplicación y división de números con signo

Sesión 1

Para empezar

Cuando se habla de números con signo, se hace referencia a los números fraccionarios y decimales, positivos o negativos, así como a los números enteros. Dichos números se pueden ubicar como puntos en una recta numérica como la siguiente:





O también pueden indicar las coordenadas de los puntos que se ubican en un plano cartesiano:

- ¿Cuáles son las coordenadas del punto A?

  ____

- Ubica en el plano cartesiano el punto cuyas coordenadas son (–1.5, –2).

En esta secuencia profundizarás en el significado de la multiplicación y la división de números con signo.

Manos a la obra

¿Qué figura resulta?

1. Trabajen en pareja. Hagan en el siguiente plano cartesiano lo que se indica.

a) Ubiquen los puntos A (2, 1), B (4, 1), C (3, 5).

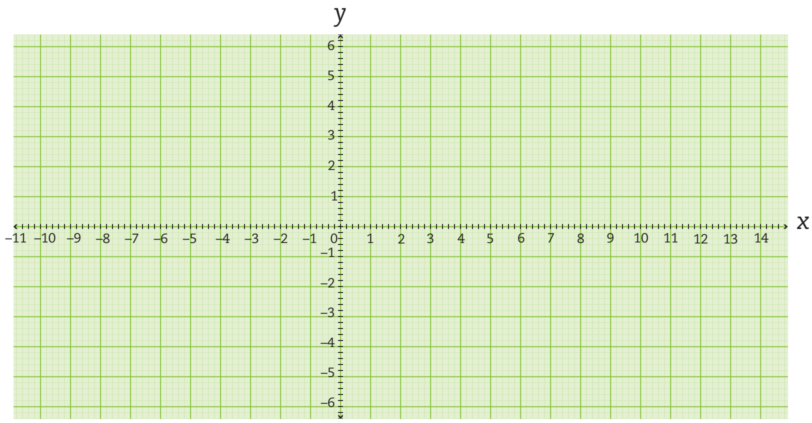
b) Unan los puntos A, B y C. ¿Qué figura se forma? _______________

c) Multipliquen por –1 la primera coordenada de cada punto. Luego ubiquen los nuevos puntos, llámenlos D, E, F y únanlos. Expliquen qué resultó: _______________

____

d) ¿Qué resultará si multiplican por –1 la segunda coordenada de cada vértice del triángulo ABC y la primera permanece igual?

____



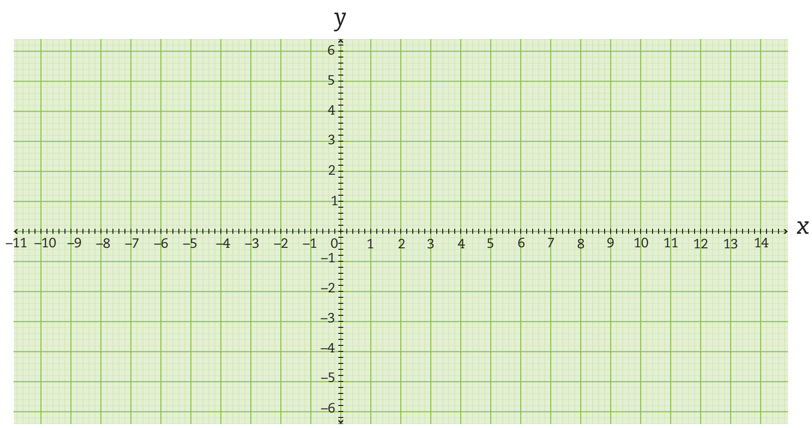
e) Usen el mismo plano cartesiano para verificar lo que pensaron que ocurriría en el inciso anterior.

f) ¿Qué consideran que resultará si multiplican por –1 las dos coordenadas de los vértices del triángulo ABC? ______________________________

g) Verifiquen en el plano cartesiano lo que pensaron que ocurriría en el inciso anterior.

2. Hagan en el siguiente plano cartesiano lo que se indica.

a) Ubiquen los puntos A (–5, –3), B (5, –3), C (5, 3), D (–5, 3) y únanlos con líneas rectas.



b) Multipliquen las coordenadas de cada punto por –0.5 y anoten las coordenadas que resultan: A' (   ), B' (   ), C' (   ), D' (   ).

Luego unan los puntos y expliquen qué resultó:

____

c) Multipliquen las coordenadas que obtuvieron en el inciso b) por –1.5 y anoten las coordenadas que resultan: A'' (   ), B'' (   ), C'' (   ), D'' (   ).

También unan los puntos y expliquen qué resultó: ______________________________

____

3. En grupo y con ayuda de su maestro, comparen sus resultados. Cuando no sean iguales, averigüen por qué y corrijan. Establezcan la relación que encuentran entre los valores de las coordenadas y los cuadrantes del plano cartesiano, y escríbanla en sus cuadernos a manera de conclusión.

Sesión 2

Dobles, triples y mitades

1. Trabajen en pareja. Anoten los datos que faltan en la tabla.

Número	$-\frac{4}{5}$	-2.4						$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n}$
Doble			$-\frac{4}{3}$				$-\frac{4}{7}$		
Triple				-3.6		$\frac{3}{8}$			
Mitad					-5.1				

2. Anoten los resultados de cada operación.

a) $4\left(-\frac{1}{5}\right) =$ __________

b) $3\left(-\frac{1}{5}\right) =$ __________

c) $2\left(-\frac{1}{5}\right) =$ __________

d) $1\left(-\frac{1}{5}\right) =$ __________

e) $0\left(-\frac{1}{5}\right) =$ __________

f) $(-1)\left(\frac{1}{5}\right) =$ __________

g) $(-2)\left(\frac{1}{5}\right) =$ __________

h) $(-3)\left(\frac{1}{5}\right) =$ __________

i) $(-4)\left(\frac{1}{5}\right) =$ __________

j) $4(-2.5) =$ __________

k) $3(-2.5) =$ __________

l) $2(-2.5) =$ __________

m) $1(-2.5) =$ __________

n) $0(-2.5) =$ __________

ñ) $(-1)(-2.5) =$ __________

o) $(-2)(-2.5) =$ __________

p) $(-3)(-2.5) =$ __________

q) $(-4)(-2.5) =$ __________

r) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) =$ __________

s) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{3}\right) =$ __________

t) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) =$ __________

u) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) =$ __________

v) $\left(-\frac{3}{4}\right)0 =$ __________

w) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) =$ __________

x) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) =$ __________

y) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{3}\right) =$ __________

z) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) =$ __________

3. ¿Qué signo tiene el producto de multiplicar un número decimal o fraccionario negativo por otro número negativo? Den un ejemplo. ____________________

____

4. Escriban en cada línea la multiplicación de dos factores que dé como resultado el producto de la primera columna. Puede haber más de una respuesta correcta.

Producto	Multiplicaciones de dos factores
a) $-\frac{2}{3} =$	
b) $-4.5 =$	
c) $0 =$	
d) $\frac{3}{4} =$	
e) $-6.9 =$	

Producto	Multiplicaciones de dos factores
f) $-\frac{6}{5} =$	
g) $4.8 =$	
h) $-\frac{5}{6} =$	

5. En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Cuando las expresiones anotadas no sean equivalentes, analicen sus procedimientos para establecer dónde erraron e indiquen los resultados correctos.

6. Realicen las siguientes multiplicaciones.

a) $(-1)\left(-\frac{1}{2}\right) =$

b) $(-1)(-2)\left(-\frac{1}{2}\right) =$

c) $(-1)(-2)(-3)\left(-\frac{1}{2}\right) =$

d) $(-1)(-2)(-3)(-4)\left(-\frac{1}{2}\right) =$

7. Marquen con una palomita (✓) si el enunciado es falso o verdadero.

Enunciado	Verdadero	Falso
a) Si en una multiplicación hay un número par de factores negativos, el resultado es positivo.		
b) Si en una multiplicación hay un número par de factores positivos, el resultado siempre es positivo.		
c) Si en una multiplicación sólo hay factores negativos, el resultado puede ser positivo o negativo.		

8. Escriban dos multiplicaciones de cuatro factores, una con resultado positivo y otra con resultado negativo. Al menos un factor debe ser fraccionario o decimal.

a)	b)

9. Registren el resultado que se obtiene al sustituir las literales por los valores de cada fila.

a	b	c	abc	$a(b+c)$	$a(b-c)$
-2	-5	-3			
3	4	$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	-3	-2			

10. Subrayen las opciones falsas.

El producto de tres factores es positivo cuando:

- los tres factores son positivos.
- dos factores son negativos.
- los tres factores son negativos.
- los factores son positivos.

11. En grupo y con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas, analicen si hubo errores y corrijan lo que sea necesario.

Sesión 3

¿En qué orden se hacen?

1. Trabajen en pareja. Primero resuelvan individualmente cada operación y luego comparen sus resultados. Si no coinciden, identifiquen el error y corrijan juntos.

a) $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4} =$ ______________

b) $\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) =$ ______________

c) $3.5 \times 2 - (-4.3) =$ ______________

d) $-4.3 - 3.5 \times 2 =$ ______________

e) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right) \div \frac{1}{4} =$ ______________

f) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right) =$ ______________

g) $\frac{3}{5}+\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right) =$ ______________

h) $\frac{3}{5}-\frac{3}{4} \div \left(-\frac{3}{4}\right) =$ ______________

i) $2.8 \times (3.4 - 2.2) =$ ______________

j) $\frac{5}{6}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right) =$ ______________

2. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Si son distintos, averigüen a qué se debe y corrijan. Después lean la siguiente información.

La jerarquía de operaciones que estudiaste para las operaciones con números naturales también es válida para las operaciones con números positivos y negativos.

- Primero se hacen las multiplicaciones y las divisiones, y después las sumas y las restas. Si sólo hay multiplicaciones y divisiones, o sólo sumas y restas, se hacen en el orden que aparecen.
- Si hay operaciones agrupadas en paréntesis, primero se hacen éstas.

3. Coloquen en cada cuadro el signo que corresponda (+, –, ×, ÷), para que la igualdad sea verdadera.

a) $\frac{1}{2}\square\left(-\frac{1}{3}\right)\square\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{12}$

b) $\frac{1}{2}\square\left(-\frac{1}{3}\right)\square\left(\frac{1}{4}\right)=1\frac{1}{12}$

4. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados de la actividad anterior. En caso de que los signos anotados no coincidan, verifiquen si las igualdades que resultan son verdaderas.

5. Escriban el número que falta en cada igualdad para que sea verdadera.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)(\quad)=\left(\frac{1}{6}\right)(-1)$

b) $(-1.5)(-1.5)=1.25\div(\quad)$

c) $\frac{2}{5}\div\left(-\frac{3}{4}\right)=\left(-\frac{2}{5}\right)(\quad)$

d) $-3\div(\quad)=-3(-5)$

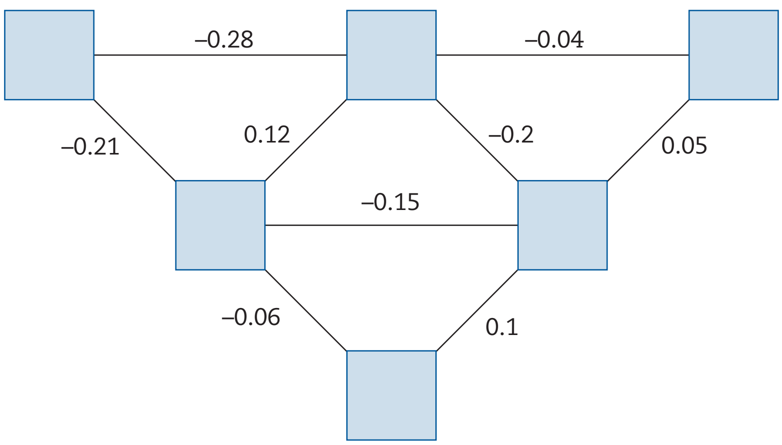
e) $-5(4-7)=3\div(\quad)$

f) $(\quad)(0.5)=\left(-\frac{3}{4}\right)\div 2$

g) $-4(0.75)\left(\frac{4}{3}\right)=4\left(-\frac{3}{5}\right)(\quad)$

h) $\frac{2}{5}-\frac{4}{5}\left(\frac{\quad}{\quad}\right)=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}$

6. Anoten en cada cuadrado los números que correspondan, de manera que al multiplicar dos números de dos cuadrados consecutivos se obtenga el número de en medio.



7. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Comenten lo que hicieron para encontrar los números faltantes, en qué casos tenían que ser positivos y en cuáles tenían que ser negativos.

8. Observen el recurso audiovisual *Jerarquía de las operaciones*. Analicen con detenimiento la manera de realizar las operaciones con números enteros, fracciones y números decimales positivos y negativos.

Sesión 4

Para terminar

Tarjetas con números

1. Resuelve los siguientes problemas.

   a) Pensé un número, lo multipliqué por 0.6 y al resultado le sumé –4. Obtuve 0.8 ¿Qué número pensé? ____________

   b) Pensé un número, lo dividí entre –0.5 y al resultado le sumé –2. Obtuve –30. ¿Qué número pensé? ____________

   c) Encuentra dos números que sumados den –2 y multiplicados den –35. Los números buscados son: ____________ y ____________

2. Encuentra el resultado de las siguientes operaciones.

   a) $\frac{5}{3} + \frac{4}{3} \times \frac{7}{6} =$ ____________

   b) $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} \div \frac{3}{2} =$ ____________

   c) $-7\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) =$ ____________

   d) $-8\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) =$ ____________

   e) $40 \div \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}\right) =$ ____________

   f) $\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) =$ ____________

3. Calcula el resultado de la multiplicación y con los mismos números escribe dos divisiones.

Multiplicación	Primera división	Segunda división
$\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{5}\right)$		

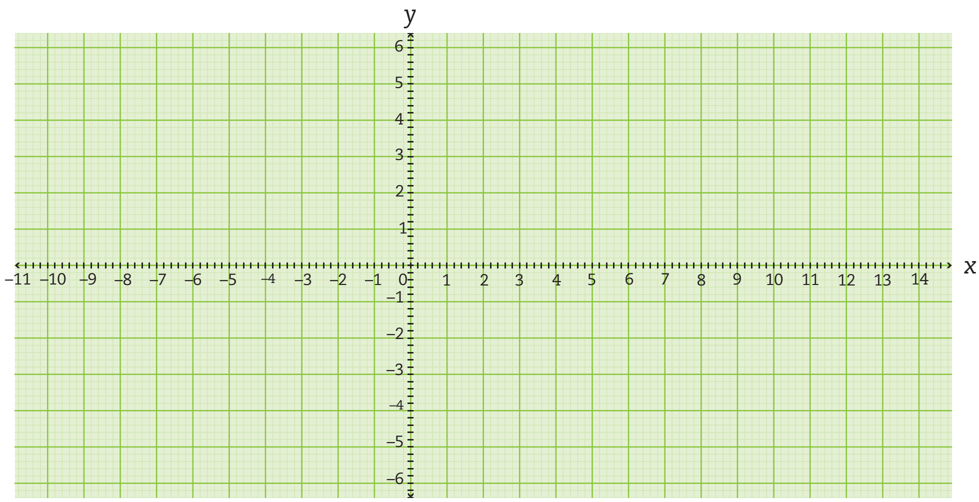
4. Considera la multiplicación $ab = -16$. Si $a = 32$, ¿cuánto vale b? ____________

5. Considera la división $a \div b = -40$. Si $a = 5$, ¿cuánto vale b? ____________

6. En grupo y con el apoyo de su maestro, comparen sus respuestas de las actividades 1 a 5. En caso de que no coincidan, averigüen a qué se debe y corrijan.

7. En el siguiente plano cartesiano haz lo que se indica.

a) Ubica los puntos A (–1, 1), B (–6, 1), C (–2, 3), D (–7, 3). Después únelos con líneas rectas en el orden en que aparecen.



b) Multiplica por –1 la primera coordenada de cada punto y anota los nuevos puntos: A′ (   ), B′ (   ), C′ (   ), D′ (   )

c) ¿Qué consideras que resultará al ubicar los puntos y unirlos en el orden que aparecen? ____

d) Utiliza el plano cartesiano para verificar lo que predijiste.

8. Elige dos o más de las siguientes tarjetas con números y los signos ×, ÷, =, para formar operaciones con su resultado. Tacha las tarjetas que vayas utilizando. Cuando las uses todas, habrás ganado. Anota las operaciones en tu cuaderno.

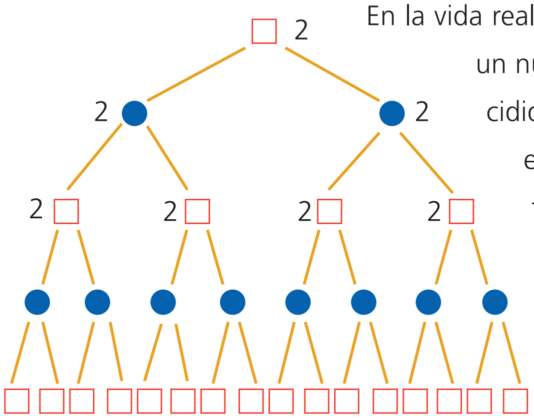
$-\frac{1}{2}$	–0.2	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{4}$	0.5	–34
$\frac{6}{5}$	$-\frac{2}{3}$	–4.6	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	6.8	$-\frac{2}{3}$	–2.3

9. Utilicen las escenas de “Dividir, ejercicios y aplicaciones” propuestas en el recurso informático *Multiplicación y división de números con signo*, para ejercitar y resolver problemas que implican la multiplicación y división de números enteros, fraccionarios y decimales positivos y negativos que se presentan. Recuperado de: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b01_t01_s01_descartes-JS/index.html

15. Potencias con exponente entero 1

Sesión 1

Para empezar



En la vida real se presentan problemas en los que es necesario multiplicar un número varias veces por sí mismo. Por ejemplo, Lucina ha decidido ahorrar. En el primer mes tiene \$2, en el segundo \$4, en el tercero \$8, en el cuarto \$16, y así sucesivamente. ¿Cuánto tendrá ahorrado al cabo de un año?

La operación que representa esta situación es: $2 \times 2 \times 2 \ldots$ (12 veces). Esta multiplicación de doce factores iguales se puede representar, de manera simplificada, mediante la potenciación, que consiste en elevar un número, o una expresión, a una potencia determinada. En esta secuencia estudiarás ésta y otras operaciones que se pueden realizar entre potencias.

Manos a la obra

El gran ahorro

1. Trabajen en pareja. Con base en la información de la sección *Para empezar*, mencionen cuánto habrá ahorrado Lucina al cabo de…

Tres meses:	Seis meses:
Diez meses:	Doce meses:

2. Expresen, mediante la potenciación, cada una de las preguntas anteriores. Básense en el ejemplo.

Ahorro en tres meses: $2^3 = 8$	Ahorro en seis meses:
Ahorro en diez meses:	Ahorro en doce meses:

3. Exploren cómo encontrar los resultados de las siguientes potencias con una calculadora y luego lean la información.

a) $2^8 =$ b) $2^{21} =$ c) $2^{15} =$ d) $2^{30} =$

Los tres términos de la potenciación tienen un nombre en particular:

Exponente → a

Base → $x^{a} = b$ ← Potencia

4. Completen la siguiente tabla con los datos que faltan.

Base	Exponente	Potencia
5	3	
	2	64
10		1 000
20		160 000
x	5	

5. Resuelvan los siguientes problemas.

a) En un terreno hay seis palmeras. Cada una tiene seis racimos de cocos, cada racimo tiene seis cocos y en cada coco se han posado seis abejas. ¿Cuántas abejas hay en el terreno? ____________________

b Si para representar una potencia sólo se pueden utilizar las cifras 3 y 5 una sola vez, ¿cuál es el mayor número que se puede obtener? ____________________

6. Consideren las siguientes expresiones en las que n es un número natural mayor que 1.

$3n$ $\qquad$ $3 + n$ $\qquad$ 3^{n} $\qquad$ $\frac{3}{n}$ $\qquad$ $3 - n$

a) ¿Cuál produce el mayor número? ____________________

b) ¿Cuál produce el menor número? ____________________

7. Anoten la cifra que falta en cada espacio. Puede haber diferentes resultados correctos.

$(\square 7)^{3} = \square\square\square 3$	$(\square\square)^{2} = \square\square 1$
$(1 \square)^{2} = \square\square\square$	$(\square\square\square)^{2} = \square\square 4 \square 4$

8. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados, analicen los errores y corrijan.

Sesión 2

Leyes de los exponentes I

1. Resuelvan en pareja los siguientes problemas.

a) Un número elevado al cubo, multiplicado por el mismo número elevado a la cuarta potencia da como resultado 128. ¿De qué número se trata? ____________

b) Un número elevado al cuadrado, multiplicado por el mismo número elevado al cubo da como resultado 3 125. ¿De qué número se trata? ____________

2. Escriban los datos que faltan en la tabla. El primer renglón es un ejemplo resuelto.

Primer factor	Segundo factor	Multiplicación	Multiplicación extendida	Suma de exponentes	Resultado
2^2	2^3	$2^2 \times 2^3$	$(2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$	2^{2+3}	2^5
3^3	3^2				
5^4	5^5				
10^2	10^5				
18^4	18^4				
a^m	a^n				

3. Con ayuda de su maestro, comparen los resultados de la tabla. Comenten cómo se obtiene el producto de dos potencias que tienen la misma base.

4. Completen la siguiente tabla.

Primer factor	Segundo factor	Multiplicación	Multiplicación extendida	Suma de exponentes	Resultado
			$(4 \times 4)(4 \times 4 \times 4)$		
				6^{3+5}	
		$7^5 \times 7^3$			
			$(b \cdot b \cdot b \cdot b)(b)$		
				9^{3+1}	
		$8^5 \times 8^5$			

5. Lean y comenten, junto con su maestro, la siguiente información.

La expresión $a^m \times a^n$ es una multiplicación de dos potencias con la misma base. El resultado es la misma base elevada a la suma de los exponentes. De manera que:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

La expresión $(2^2)^3$ se conoce como potencia de una potencia y se puede resolver como una multiplicación de potencias de la misma base. Así:

$$(2^2)^3 = 2^2 \times 2^2 \times 2^2 = 2^{2+2+2} = 2^{2\times 3} = 2^6 = 64.$$

De manera abreviada, una potencia de una potencia es igual a la base elevada al producto de los exponentes. Así:

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

6. Usen las leyes de los exponentes descritos en el recuadro anterior para resolver las siguientes operaciones.

a) $2^5 \times 2^3 =$ ____________

b) $3^2 \times 3^2 =$ ____________

c) $(2^3)^4 =$ ____________

d) $5^2 \times 5^4 =$ ____________

e) $15 \times 15^4 =$ ____________

f) $(4^5)^3 =$ ____________

g) $12^3 \times 12^2 =$ ____________

h) $a^3 \times a^4 =$ ____________

i) $(3^2)^2 =$ ____________

j) $(5^3)^2 =$ ____________

k) $(b^5)^3 =$ ____________

l) $x^2 \cdot x =$ ____________

7. Hagan lo que se indica.

a) Inventen tres *multiplicaciones de potencias con la misma base* y resuélvanlas.

Primera	Segunda	Tercera

b) Inventen tres *potencias de potencias* y resuélvanlas.

Primera	Segunda	Tercera

c) Tachen las operaciones cuyo resultado sea incorrecto.

$3^5 \times 3^2 = 3^{10}$ $\quad (3^5)^2 = 3^{10}$ $\quad 3^5 \times 3^2 = 3^7$ $\quad (3^5)^2 = 3^7$

8. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. En caso de que no coincidan, identifiquen los errores y corrijan lo necesario.

9. Observen el recurso audiovisual *Potencias* para ampliar sus conocimientos acerca de las leyes de los exponentes.

Sesión 3

Leyes de los exponentes II

1. Trabajen en pareja. Escriban los datos que faltan en la tabla. El primer renglón está resuelto a modo de ejemplo.

Dividendo	Divisor	División	División extendida	Resta de exponentes	Resultado
2^2	2^3	$2^2 \div 2^3$	$\frac{2\times2}{2\times2\times2}=\frac{1}{2}$	2^{2-3}	$2^{-1}=\frac{1}{2}$
3^3	3^2				
5^4	5^5				
10^2	10^5				
18^4	18^4				
20^2	20^1				
50^3	50^3				
a^m	a^n				

2. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados de la tabla. Comenten cómo se obtiene el cociente de dos potencias que tienen la misma base.

3. Completen la siguiente tabla.

Dividendo	Divisor	División	División extendida	Resta de exponentes	Resultado
		$4^3 \div 4^2$			
			$\frac{6\times6\times6}{6\times6\times6\times6}=\frac{1}{6}$		
				7^{5-3}	
		$7^3 \div 7^5$			
			$\frac{6\times6\times6\times6}{6\times6\times6}=6$		
		$18^5 \div 18^5$			
				a^{2-3}	

4. Lean y comenten, junto con su maestro, la siguiente información.

La expresión $a^m \div a^n$ es una división de dos potencias con la misma base. El resultado es la misma base elevada a la diferencia de los exponentes. De manera que: $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Cuando el exponente del dividendo es igual al exponente del divisor, la diferencia es cero. Por ejemplo, $2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$. Puesto que el exponente cero resulta al dividir dos números iguales (en este caso 2^3), podemos concluir que cualquier número elevado a la cero potencia es igual a **1**.

Cuando el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor, la diferencia es un número negativo. Por ejemplo, $6^3 \div 6^4 = 6^{3-4} = 6^{-1} = \frac{1}{6}$. Podemos concluir que cualquier base elevada a un exponente negativo es igual a una fracción con numerador 1 y el denominador es la base con exponente positivo.

5. Marquen con una palomita (✓) si el enunciado es verdadero (V) o falso (F). En caso de que sea falso, muéstrenlo con un ejemplo.

Enunciado	V	F	Ejemplo
a) El cociente de dos potencias con la misma base es igual a la base elevada a la diferencia de los exponentes.			
b) El producto de dos potencias de la misma base es igual a la base elevada al producto de los exponentes.			
c) Cualquier número elevado a la cero potencia es igual a cero.			
d) Un número elevado a un exponente negativo, como a^{-2}, es igual a: $\frac{1}{a^2}$			

6. Con apoyo de su maestro, comparen los resultados de la tabla de la actividad 3 y vean si coinciden con los enunciados de la actividad 5 de esta sesión.

7. Usen las leyes de los exponentes para calcular las siguientes potencias.

a) $6^5 \div 6^3 =$ ____________ c) $(15^3)^4 =$ ____________ e) $a^3 \times a^4 =$ ____________

b) $10^3 \times 10^4 =$ ____________ d) $(a^3)^2 =$ ____________ f) $a^3 \div a^4 =$ ____________

8. Conviertan a exponente positivo las siguientes expresiones.

a) $2^{-5} =$ ____________ c) $10^{-1} =$ ____________ e) $x^{-4} =$ ____________

b) $5^{-2} =$ ____________ d) $100^{-3} =$ ____________ f) $x^{-a} =$ ____________

9. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas, identifiquen y analicen los errores y corrijan si es necesario.

Sesión 4

Para terminar

La notación científica

1. Trabajen en equipo. Analicen el enunciado que hay debajo de cada letra y contesten las siguientes preguntas.

A	B
En México se consumen diariamente 1.23×10^8 litros de gasolina.	En México se consumen diariamente 123 000 000 de litros de gasolina.
C	**D**
En México se consumen diariamente 123 millones de litros de gasolina	En México se consumen diariamente ciento veintitrés millones de litros de gasolina.

a) ¿Consideran que los cuatro enunciados dicen lo mismo?____________________

Justifiquen su respuesta. ____

2. Anoten debajo de las letras la misma información que contiene el inciso G. Utilicen el mismo formato que la tabla de la actividad 1 de esta sesión. Después lean el recuadro.

E	F
G	**H**
México genera 42 millones de toneladas de residuos sólidos al año.	

El formato usado en los recuadros A y E se escribe, de manera general, $a \times 10^n$. Este formato se llama notación científica y se usa para representar cantidades muy grandes o muy pequeñas.

En la expresión $a \times 10^n$, a es un número decimal mayor o igual que 1 y menor que 10. El exponente n es un número entero.

La expresión 1.45×10^8 es equivalente a 145 000 000. El punto decimal se recorre 8 lugares a la derecha.

La expresión 4×10^{-5} equivale a 0.00004; el punto se recorre cinco lugares a la izquierda.

3. Escriban debajo de cada letra la misma información que hay en el recuadro L. El recuadro I deberá llevar notación científica.

I	J
K	**L**
	Un virus mide aproximadamente dos cienmillonésimas de centímetro.

4. Escriban en notación científica las siguientes cantidades.

a) La población de México es de 120 millones. ______________________

b) El pez gobio enano pesa 0.00014 onzas. ______________________

c) Después del Sol, la estrella más cercana a la Tierra está a 24 800 000 000 000 millas de distancia. ______________________

5. Los siguientes datos se refieren a la probabilidad de morir por algunas causas particulares. Escríbanlos en notación científica. El primer renglón está resuelto como ejemplo.

Causa de muerte	Razón	Fracción	Decimal	Notación científica
Fumar 10 cigarros al día	1 de 200	$\frac{1}{200}$	0.005	5×10^{-3}
Accidente en automóvil	1 de 8 000			
Accidente en la casa	1 en 260 000			
Accidente en tren	1 en 500 000			

6. Ordenen de menor a mayor los siguientes números. Escriban dentro del cuadro el 1 al de menor valor, y el 5 al mayor.

a) ☐ 2×10^{-2} b) ☐ 3×10^{-1} c) ☐ 2.5×10^{-3} d) ☐ 2.9×10^{-2} e) ☐ 3.2×10^{-1}

7. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. En caso de que no coincidan, identifiquen los errores, piensen cómo evitarlos y corríjanlos.

8. Utilicen el recurso informático *Potencias*, en el que podrán aplicar sus conocimientos acerca de las leyes de los exponentes.

16. Raíz cuadrada de números cuadrados perfectos

Sesión 1

Para empezar

La raíz cuadrada de un número es la operación inversa de elevar al cuadrado dicho número. Un problema muy común en el que resulta útil la raíz cuadrada es el que consiste en calcular la medida de un lado de un cuadrado cuando se conoce su área. Por ejemplo, si el área de un cuadrado es 81 m^2, un lado de ese cuadrado mide 9 m, ya que 9 es la raíz cuadrada de 81.

$$\sqrt{2} = 1.41421356237$$

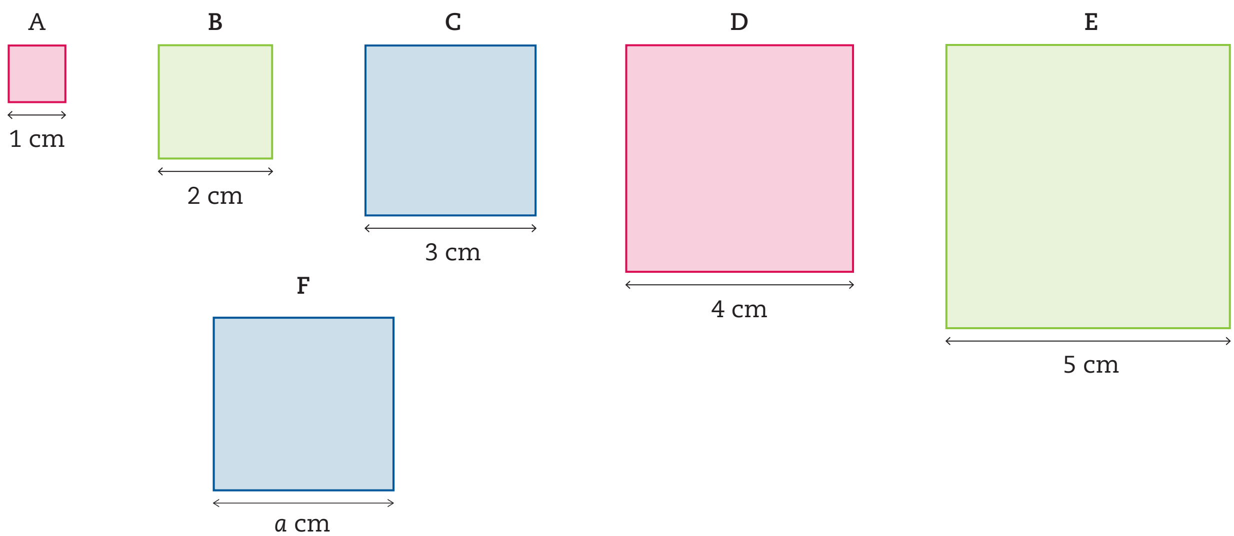
La raíz cuadrada tiene varias aplicaciones en otros contenidos matemáticos, como en el teorema de Pitágoras, la resolución de ecuaciones de segundo grado y el uso de fórmulas para resolver diversos problemas.

En esta secuencia comenzarás a estudiar los aspectos básicos de la raíz cuadrada.

Manos a la obra

La operación inversa de elevar al cuadrado

1. Trabajen en pareja. Calculen el área de cada cuadrado y anótenla dentro de la figura.



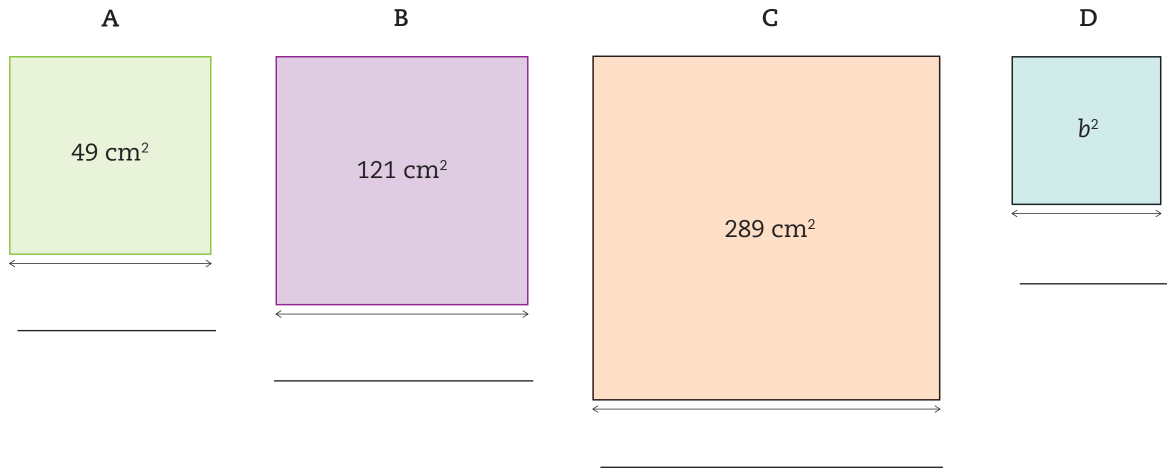
2. Describan el procedimiento que usaron para calcular el área de un cuadrado. ____________

____

3. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde al área de un cuadrado cuyo lado mide n? Enciérrenla con un círculo.

a) $4n$ b) $4 + n$ c) n^2 d) 2^n e) $\frac{4}{n}$

4. Calculen la medida de un lado de cada cuadrado y anótenla donde corresponda. Después hagan lo que se indica.



a) Expliquen cómo hicieron para calcular la medida del lado de un cuadrado a partir de su área. ______

b) Con el mismo procedimiento que anotaron, ¿podrían calcular la medida de un lado de un cuadrado cuya área es 3 249 cm^2? ______

¿Cuál sería la medida? ______

c) Si el área fuera 1 296 cm^2, ¿cuánto mediría un lado del cuadrado? ______

d) Si el área fuera 12 cm^2, ¿cuánto mediría un lado del cuadrado? ______

5. En grupo y con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

La operación que permite calcular la medida de un lado de un cuadrado, si se conoce el área, se llama *raíz cuadrada*. Esta operación es la inversa de elevar al cuadrado.

Por ejemplo, si un lado del cuadrado mide 6 cm, el área es $6^2 = 36$ cm^2. Si el área es 36 cm^2, un lado del cuadrado mide $\sqrt{36} = 6$ cm.

6. Calculen la raíz cuadrada de los siguientes números.

a) $\sqrt{81}=$ ________

b) $\sqrt{256}=$ ________

c) $\sqrt{25}=$ ________

d) $\sqrt{36}=$ ________

e) $\sqrt{100}=$ ________

f) $\sqrt{729}=$ ________

g) $\sqrt{1225}=$ ________

h) $\sqrt{5^2}=$ ________

i) $\sqrt{144}=$ ________

j) $\sqrt{10\,000}=$ ________

k) $\sqrt{1}=$ ________

l) $\sqrt{a^2}=$ ________

7. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados y comenten cómo calcularon la raíz cuadrada de 1 225.

Sesión 2

Aproximaciones sucesivas

1. Trabajen en pareja. Una manera de calcular la raíz cuadrada de un número es por *aproximaciones sucesivas*. Completen el procedimiento para calcular la raíz cuadrada de 8 742.

   a) La raíz que se busca es menor que 100, porque $100^2=$ ________ Se pasa.
   b) Es mayor que 90, porque $90^2=$ ________ Le falta.
   c) Es menor que 95, porque ________
   d) Es mayor que 93, porque ________
   e) Es menor que 94, porque ________
   f) La raíz que se busca está entre ________ y ________
   g) ¿Cuál es la raíz cuadrada de 8 742 aproximando hasta décimos? ________

2. Expliquen en qué consiste el procedimiento de aproximaciones sucesivas para calcular la raíz cuadrada de un número. ________

3. Identifiquen la raíz cuadrada de cada número y anótenla después del signo "igual a".

a) $\sqrt{1\,849}=$

b) $\sqrt{361}=$

c) $\sqrt{784}=$

d) $\sqrt{484}=$

e) $\sqrt{5\,625}=$

f) $\sqrt{1156}=$

g) $\sqrt{3\,364}=$

h) $\sqrt{529}=$

i) $\sqrt{441}=$

j) $\sqrt{289}=$

k) $\sqrt{169}=$

l) $\sqrt{196}=$

58	17	14	22	23	19
75	21	34	43	13	28

4. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas. Comenten en qué se fijaron para identificar la raíz cuadrada de cada número.

5. En grupo y con apoyo de su maestro, analicen la siguiente información.

Con los tres términos que hay en un número elevado al cuadrado se puede escribir una operación de raíz cuadrada.

Exponente

Índice

$$3^2 = 9 \qquad \sqrt{9} = 3$$

Base

Potencia

Radicando

Raíz

Cuando se trata de la raíz cuadrada, el índice (2) no se escribe.

6. Realicen lo que se indica a continuación.

a) Para cada número elevado al cuadrado, escriban debajo la raíz cuadrada que corresponde. Pueden usar calculadora. El primer caso está resuelto como ejemplo.

$11^2 = 121$	$14^2 =$	$16^2 =$	$19^2 =$	$20^2 =$
$\sqrt{121} = 11$				
$23^2 =$	$28^2 =$	$32^2 =$	$45^2 =$	$50^2 =$
$105^2 =$	$200^2 =$	$321^2 =$	$425^2 =$	$520^2 =$

b) Para cada raíz cuadrada, escriban debajo el número al cuadrado que corresponde. El primer caso está resuelto como ejemplo.

$\sqrt{484} = 22$	$\sqrt{676}$	$\sqrt{5\,625}$	$\sqrt{7\,396}$	$\sqrt{15\,625}$
$22^2 = 484$				

7. Con apoyo de su maestro, comparen sus resultados. Comenten si su calculadora tiene la función de raíz cuadrada y si saben utilizarla.

Para terminar

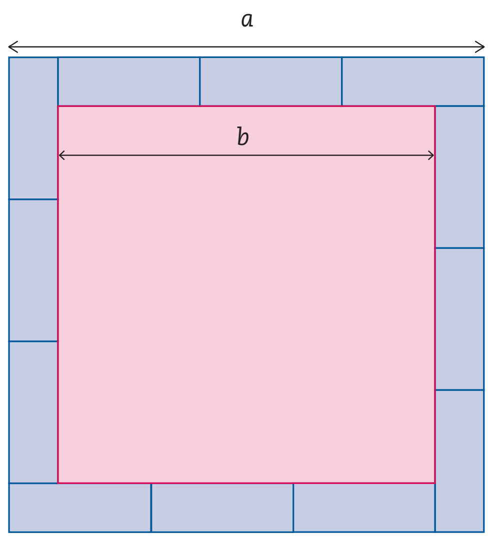
La diagonal del cuadrado

1. Trabajen en equipo. Resuelvan los siguientes problemas.

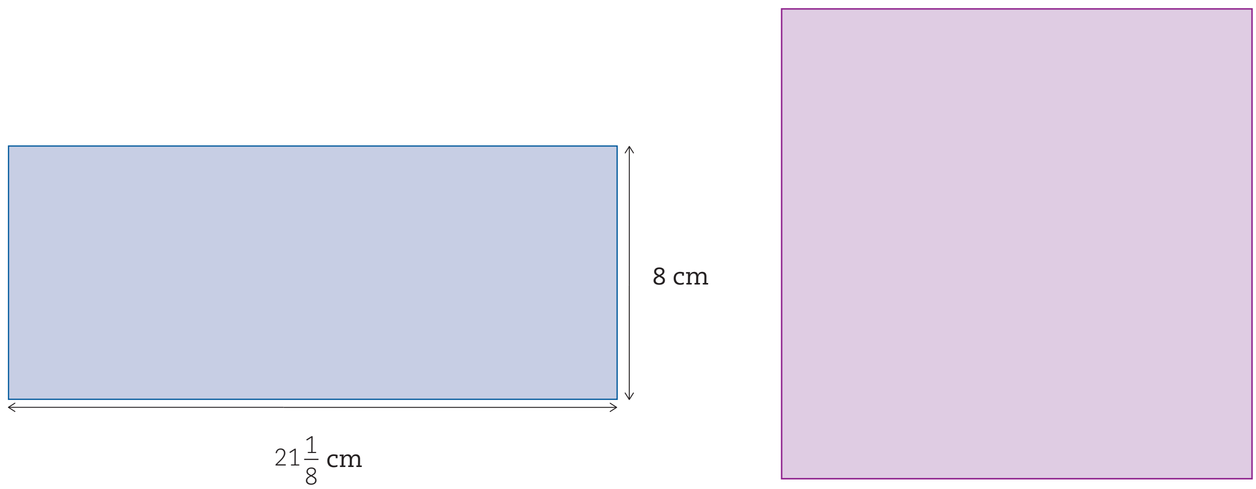
a) El área del cuadrado cuyo lado mide *a* es 2 500 cm². El área del cuadrado cuyo lado mide *b* es 1 600 cm².

- ¿Cuál es el valor de *a*? __________________
- ¿Cuál es el valor de *b*? __________________
- ¿Cuál es el área de uno de los rectángulos azules? __________________
- ¿Cuáles son las dimensiones de uno de los rectángulos azules?

  Largo: __________ Ancho: __________



b) El rectángulo y el cuadrado tienen la misma área. ¿Cuánto mide un lado del cuadrado? __________________



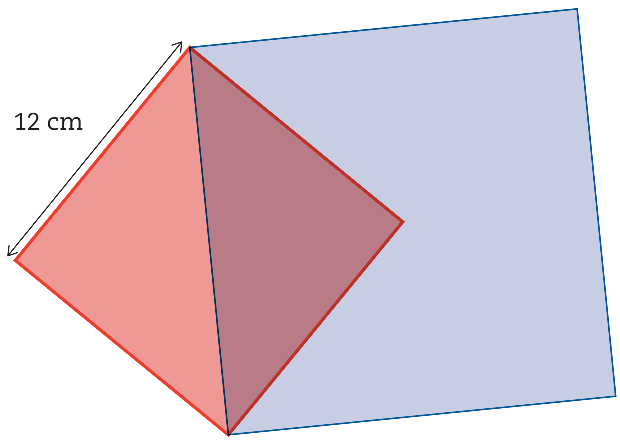
2. Con el apoyo de su maestro, comparen sus resultados, analicen los errores y corríjanlos si es necesario.

Algunos números tienen *raíz cuadrada entera* y se llaman *cuadrados perfectos*. Estos son: 1, 4, 9, 16, … Otros números tienen raíz cuadrada decimal finita. Por ejemplo, 3.2 es la raíz cuadrada de 10.24, porque $3.2^2 = 10.24$

Otros números, como 2, 3, 5, tienen como raíz cuadrada un número con una parte decimal infinita. Por ejemplo, $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ Estos números se llaman *irracionales*.

Así que, si quieres hacer operaciones con la raíz cuadrada exacta de 2, usa la expresión: $\sqrt{2}$

3. El cuadrado azul está construido sobre la diagonal del cuadrado rojo. Analicen la figura y contesten las preguntas.



a) ¿Cuál es el área del cuadrado rojo? ______

b) ¿Cuál es el área del cuadrado azul? ______

c) ¿Cuánto mide un lado del cuadrado azul? Si es un número irracional, expresa la medida con el símbolo de la raíz cuadrada. ______

______

4. Calculen la raíz cuadrada de los siguientes números. Subraya los que consideres que son irracionales.

a) $\sqrt{64}$ = ______ b) $\sqrt{29.16}$ = ______ c) $\sqrt{21}$ = ______ d) $\sqrt{30}$ = ______

5. Con el apoyo de su maestro, revisen los resultados, analicen los errores y corrijan.

6. Observen el recurso audiovisual *Raíz cuadrada de un número* para conocer más sobre esta operación.

17. Reparto proporcional

Sesión 1

Para empezar

Si entre dos personas compran un billete de lotería y cada uno aporta la mitad del costo, en caso de sacar un premio se espera que lo repartan por la mitad. También puede suceder que uno ponga tres cuartas partes del costo y el otro sólo la cuarta parte; entonces, ¿cómo se repartirá el premio?

De la misma manera, si el billete de lotería cuesta $25 y para comprarlo Alan pone $12, Eva pone $8 y Carmen $5, ¿cómo se repartirían un premio de $75 000? Problemas como el anterior reciben el nombre de repartos proporcionales y en esta secuencia estudiarás cómo se resuelven.

Manos a la obra

Dato interesante
La Lotería Nacional de México es la más antigua de Latinoamérica.

Se fundó en 1770 y se llamaba Real Lotería General de la Nueva España. Sus ganancias se utilizan en beneficio de México.

¿Qué parte del terreno les toca?

1. Los rectángulos representan terrenos que costaron $60 000. En cada uno se menciona quiénes lo compraron y el dinero que aportaron. Cada terreno se repartirá proporcionalmente entre las personas que lo compraron. Divídelos en partes y anota a quién le toca cada una.

Terreno 1
Lilia $30 000
Raúl $30 000

Terreno 2
Gabriela $30 000
Joaquín $15 000
Brenda $15 000

Terreno 3

Jessica $30 000

Christian $20 000

Laura $10 000

Terreno 4

Patricia $40 000

Alejandra $10 000

Jimena $10 000

Terreno 5

Leticia $12 000

Martín $12 000

Manolo $36 000

Terreno 6

Lourdes $20 000

Blanca $12 000

Andrés $24 000

Guillermo $4 000

2. Verifica tus particiones con las de otro compañero y respondan lo siguiente.
   a) Lilia puso el mismo dinero que Raúl, ¿le toca la misma cantidad de terreno que a él? ____________________
   b) Gabriela puso el doble de lo que puso Joaquín, ¿le tocó el doble de terreno que a Joaquín? ____________________
   c) Jimena colaboró con la cuarta parte de lo que puso Patricia, ¿le tocó la cuarta parte del terreno que le tocó a Patricia? ____________________

3. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros. Es probable que las partes en que dividieron los terrenos tengan diferente forma, pero deben representar la misma fracción de terreno. Busquen la forma de comprobarlo.

Sesión 2

Nueces, almendras y pistaches

1. Trabajen en pareja y resuelvan el siguiente problema.

La maestra Laura va a repartir entre los equipos de su grupo nueces, almendras y pistaches. Como son 5 equipos, la maestra dice que dividirá en 5 partes iguales lo que va a repartir, pero algunos equipos protestaron. Observen las imágenes de abajo y respondan las preguntas.

a) ¿Qué equipos creen que hayan protestado y por qué? ______

b) ¿A cuál equipo creen que tendría que darle menos? ______

c) ¿Por qué creen que tendría que darle menos? ______

______

d) ¿A cuál tendría que darle más? ______

e) ¿Por qué tendría que darle más? ______

2. La maestra Laura va a repartir 75 nueces, 125 almendras y 50 pistaches. Anoten en el recuadro de cada equipo lo que debe recibir cada uno si se reparte todo de manera proporcional al número de integrantes del equipo.

Semilla \ Equipo	1	2	3	4	5
Nueces					
Almendras					
Pistaches					

3. Si va a repartir también 200 gramos de piñones y 250 gramos de cacahuates, escriban lo que debe darle a cada equipo.

Semilla \ Equipo	1	2	3	4	5	Total
Piñones (gramos)						200
Cacahuates (gramos)						250

4. Respondan lo siguiente a partir del número de integrantes.
   a) El equipo 4 tiene $\frac{1}{2}$ del número de integrantes del equipo 1. ¿Las cantidades que recibió de todo corresponden a $\frac{1}{2}$ de lo que recibió el equipo 1? __________
   b) El equipo 4 tiene $\frac{3}{4}$ del número de integrantes del equipo 3. ¿Las cantidades que recibió de todo corresponden a $\frac{3}{4}$ de lo que recibió el equipo 3? __________
   c) El equipo 3 tiene $\frac{4}{5}$ del número de integrantes del equipo 2. ¿Las cantidades que recibió de todo corresponden a $\frac{4}{5}$ de lo que recibió el equipo 2? __________

5. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros.

6. Observen el recurso audiovisual *¿Cuánto le toca a cada quién?*, donde profundizarán sus conocimientos sobre los repartos proporcionales.

Para terminar

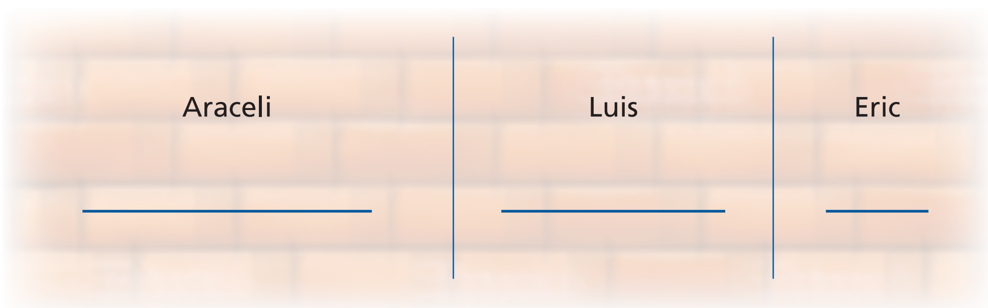
Ser justos al repartir

1. Resuelvan en pareja los siguientes problemas.

Tres sastres hicieron un trabajo en equipo. Uno de ellos trabajó 12 horas; otro, 6 y el tercero, 4. Por el trabajo recibieron una ganancia de $4 400. ¿Cuánto le tocará a cada uno si se reparten la ganancia proporcionalmente al tiempo que trabajaron?

	Sastre 1	Sastre 2	Sastre 3	Total
Horas trabajadas	12	6	4	
Ganancia ($)				4 400

2. En el siguiente dibujo se indica la parte de una pared que pintaron tres amigos. Les pagaron $600 y piensan repartir este dinero proporcionalmente a lo que cada uno trabajó. Anoten debajo de cada nombre la cantidad que deberá recibir.



3. Entre Alma, Patricia, Brandon y Julio pintaron una pared. Por el trabajo recibieron $1 200. Completen la siguiente tabla considerando que las ganancias fueron repartidas de manera proporcional a lo que pintó cada quien.

	Alma	Patricia	Brandon	Julio	Total
Parte que pintó cada uno					
Ganancia ($)	600	300	150	150	1 200

4. En un campamento hay cuatro casas de campaña. En la siguiente tabla se indica el número de integrantes de cada una. Se repartirán proporcionalmente 60 litros de agua entre todas. Escriban el número de litros de agua que le toca a cada una.

Casa de campaña	1	2	3	4
Número de integrantes	3	6	4	2
Litros de agua				

5. Lean el siguiente relato.

Los ocho panes

Nos encontramos en el camino a un viajero llamado Maclovio; él era uno de los hombres más ricos de California. Su caravana había sido saqueada y no tenía nada para comer. Yo tenía 3 panes y Octavio llevaba 5. Decidimos juntar los 8 panes y repartirlos en partes iguales entre los tres.

Cuando llegamos a Sacramento, Maclovio nos regaló 8 lingotes de oro como agradecimiento al pan que le compartimos. A mí me dio 3 lingotes y a Octavio le dio 5. Con sorpresa, Octavio protestó y dijo: "La división hecha de ese modo es sencilla, pero no justa". Octavio agregó: "Si yo entregué 5 panes, he de recibir 7 lingotes; y mi compañero, que dio 3 panes, debe recibir solo uno".

a) ¿Por qué creen que Octavio propuso este reparto de los lingotes? ______________________

b) ¿Creen que la propuesta de Octavio es un reparto proporcional? ______________________

c) Argumenten su respuesta.

____

6. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas y procedimientos con sus compañeros.

7. Utilicen el recurso informático *Repartos proporcionales*, donde practicarán la resolución de problemas de este tema.

18. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 2

Sesión 1

Para empezar

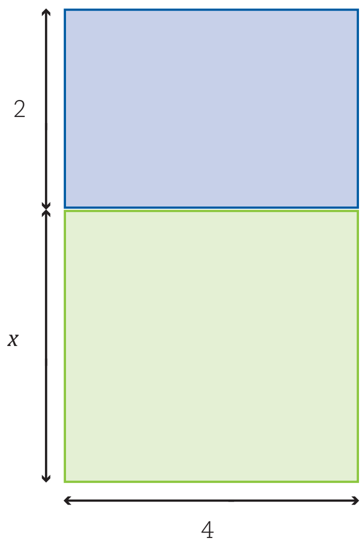
En varios países anglosajones, existe una técnica artesanal para hacer una colcha, un tapete o un mantel, cosiendo o tejiendo fragmentos de diversas telas. En los países hispanohablantes, a estas piezas se les conoce como *acolchados*.

Observa la ilustración. ¿Cuántas expresiones algebraicas distintas podrías escribir para calcular el perímetro o el área de la sección remarcada en la colcha?

En esta secuencia continuaremos relacionando la representación geométrica con la algebraica para aprender a obtener más de una expresión algebraica de una situación y verificar que sean equivalentes. Se espera que, al finalizar el estudio de la secuencia, puedas dar más de una respuesta a la pregunta anterior.

Varias formas para lo mismo

1. Obtén dos expresiones algebraicas equivalentes para el perímetro y otras dos para el área de la siguiente figura.



Perímetro

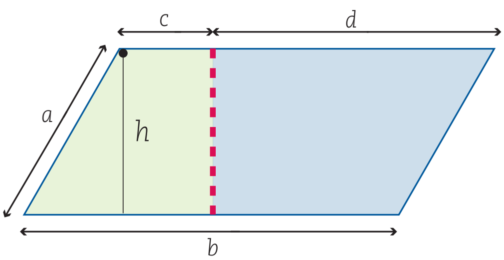
Expresión 1: ____________________ Expresión 2: ____________________

Área

Expresión 1: ____________________ Expresión 2: ____________________

Manos a la obra

2. Formen un equipo para trabajar las siguientes actividades de esta sesión. Observen el siguiente romboide.



a) Obtengan una expresión algebraica para calcular su área. ____________________

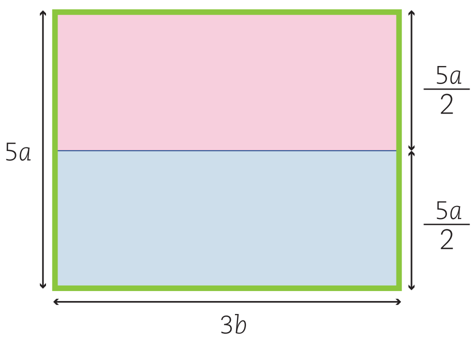
b) Escriban una expresión algebraica equivalente a la anterior. ____________________

c) Dibujen una figura geométrica cuya área también corresponda a la expresión algebraica equivalente que acaban de obtener.

d) Verifiquen la equivalencia de ambas expresiones algebraicas, asignando diversos valores a las literales.

Valor				Área	
h	b	c	d	Primera expresión:	Segunda expresión:

3. Consideren la siguiente figura:



a) Obtengan la expresión algebraica para calcular el área del rectángulo verde.

____

b) ¿Cómo expresarían el área del rectángulo verde, utilizando las medidas de los rectángulos interiores? ____________________

c) Verifiquen en su cuaderno que las expresiones algebraicas son equivalentes asignando valores a las literales.

4. ¿Cuáles de las siguientes expresiones algebraicas también permiten obtener el área del rectángulo verde? Márcalas con una palomita (✓).

☐ $3b\left(\frac{5a}{2}+\frac{5a}{2}\right)$ ☐ $3b\left[2\left(\frac{5a}{2}\right)\right]$ ☐ $6b\left(\frac{5a}{2}\right)$

a) Escriban una igualdad con una de las expresiones algebraicas equivalentes que obtuvieron en la actividad 3 y con una de las que acaban de marcar.

Expresión algebraica 1	Igualdad	Expresión algebraica 2
	=	

b) Transformen la primera expresión en la segunda y viceversa, aplicando las reglas algebraicas que corresponden.

5. Comparen sus resultados con los de otro equipo. Si obtuvieron expresiones o figuras geométricas distintas, verifiquen que sean equivalentes.

6. Lean y comenten con su maestro la siguiente información.

Cuando se comprueba que una expresión para calcular el perímetro o el área de una figura es equivalente a otra mediante la manipulación algebraica, se usan las siguientes propiedades de la igualdad:

Para cualesquiera números a, b y c, si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.

Es decir, si se suma o resta el mismo valor a ambos lados de la igualdad, ésta no se altera. Esta propiedad se llama *propiedad aditiva* o *propiedad uniforme*.

Para cualesquiera números a, b y c, si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$, o bien, $ac = bc$.
Si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$; donde $c \neq 0$.

En otras palabras, cuando se multiplica o divide por el mismo número a ambos lados de la igualdad, la expresión resultante también será equivalente, siempre y cuando $c \neq 0$ para la división. Esta propiedad se llama *propiedad multiplicativa* o *propiedad de cancelación*.

Sesión 2

Un paso adelante

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Tracen dos figuras que formen una composición con las siguientes condiciones: el área de la figura A es $14x$ y el de la figura B es $6xy$.

a) Expresen el área total de la composición: ____________________

b) Dibujen otra figura geométrica que tenga como área $2x\,(3y + 7)$.

c) ¿Tienen la misma área la figura del inciso b) y la suma de las dos figuras del inciso a)? ____________ Justifiquen su respuesta. ____________________

____

2. Escriban una igualdad con las expresiones algebraicas equivalentes que han obtenido en la actividad 1.

a) Transformen la primera expresión algebraica en la segunda y viceversa.

b) Intercambien con otros compañeros sus respuestas y, en caso de que sean distintas, verifiquen las transformaciones que realizaron.

Expresión algebraica 1 (figura A + figura B)	Igualdad	Expresión algebraica 2 (figura C)
	=	

3. Observen la siguiente figura.

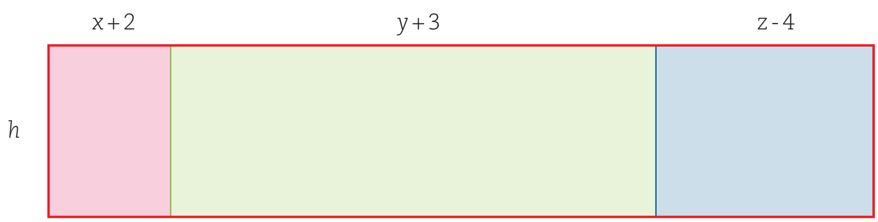


Figura 1

a) Obtengan el área del rectángulo rojo. ____________________

b) Escriban una expresión equivalente para el área del rectángulo rojo, pero que esté expresada con las medidas de los tres rectángulos interiores. ____________

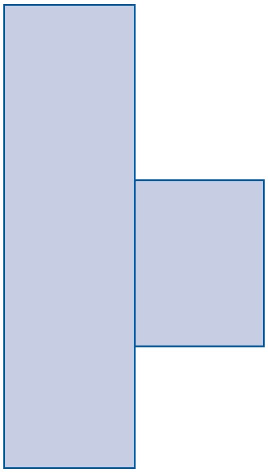


Figura 2

c) Verifiquen que las expresiones obtenidas en los dos incisos anteriores sean equivalentes, asignando valores a las variables de cada expresión.

4. La figura 2 es una transformación de la figura 1, sin que se haya alterado ninguna de las medidas del rectángulo rojo.

a) Asignen las dimensiones de la figura 2 respecto a las dimensiones de la figura 1.

b) ¿El área de ambas figuras mide lo mismo? Justifiquen su respuesta. ______________________________

____

c) ¿El perímetro de ambas figuras medirá lo mismo? ¿Por qué? ______________________

____

5. Observen el recurso audiovisual *Expresiones algebraicamente equivalentes*, con el cual ampliarán su conocimiento sobre este tema. Centren su atención en las maneras en que se realizan las transformaciones algebraicas.

Sesión 3

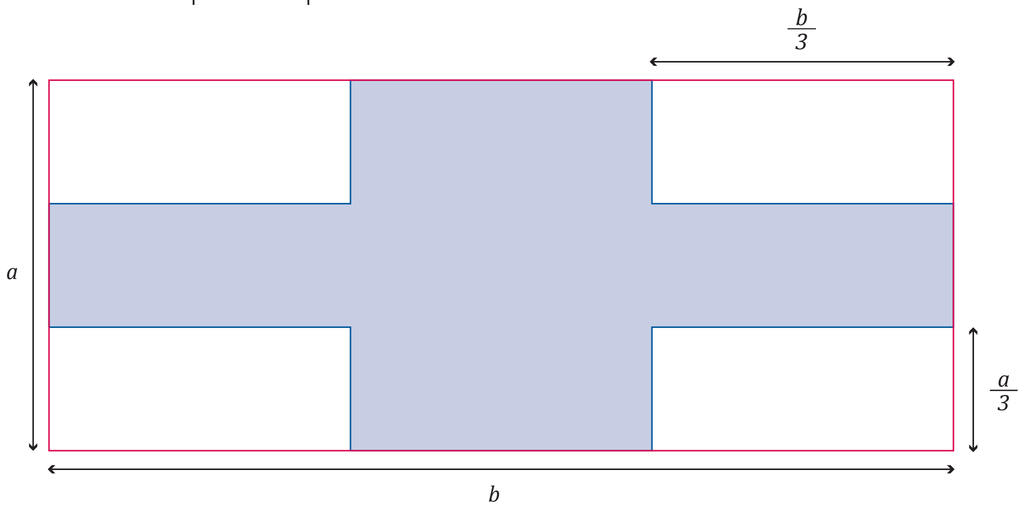
Para terminar

Para ejercitar aún más

1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Escriban expresiones equivalentes para cada una de las siguientes expresiones, realizando operaciones para transformarlas. Después, verifiquen su equivalencia con algunos ejemplos, asignando diversos valores.

Expresión algebraica	Expresión algebraica equivalente
$3\left(\frac{1}{3}a + 13a + 6b\right)$	
	$25m - 45k + 1$
	$x + x + 4 + y + 7 + 2y$
$(x + b)(y + 5)$	

2. La siguiente figura está formada por rectángulos con las medidas que se indican. Realicen lo que se les pide.



a) Obtengan la expresión algebraica para el perímetro del rectángulo rojo. ________

____

b) En el recuadro de abajo apliquen las propiedades de la igualdad y realicen las operaciones necesarias para obtener dos expresiones equivalentes a la expresión algebraica que obtuvieron en el inciso a).

c) Verifiquen en su cuaderno su equivalencia asignando algunos valores a cada literal.

3. Observen el recurso audiovisual *Otras expresiones algebraicamente equivalentes*, con el cual ampliarán su conocimiento sobre este tema. Comenten con sus compañeros cómo se aplicaron las propiedades de la igualdad para obtener expresiones algebraicas equivalentes.

4. Resuelvan los problemas que se presentan en el recurso informático *Expresiones equivalentes 2* para seguir obteniendo expresiones algebraicas equivalentes y comprobando su equivalencia.

19. Sucesiones y expresiones equivalentes 2

Sesión 1

Para empezar

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots, n$

1^er^ término

2^do^ término

3^er^ término

4^to^ término

5^to^ término

A cada uno de los números que forman una sucesión se les llama *término*, *elemento* o *miembro*.

Anteriormente trabajaste con sucesiones de números enteros positivos y negativos, describiste con tus palabras las reglas o patrones que siguen, planteaste expresiones algebraicas que representan a esas reglas y verificaste que fueran equivalentes. Para recordarlo, encuentra dos expresiones algebraicas equivalentes que generen la sucesión de números: $3, 5, 7, 9, 11, \ldots, a_n$

Expresiones algebraicas que representan la regla de la sucesión	Posición del término en la sucesión					
	1ro	2do	3ro	4to	5to	n
1. $n + n + 1$	3	5	7	9	11	$n + n + 1$
2.						
3.						

Comparen las expresiones algebraicas que escribieron y verifiquen si generan los términos de la sucesión. Si todas cumplen, entonces se puede decir que son expresiones algebraicas equivalentes de la regla.

En esta secuencia verificarán la equivalencia algebraica de expresiones de primer grado que generan sucesiones de números enteros y de números fraccionarios y decimales con signo.

Manos a la obra

1. Trabajen en pareja. Observen las sucesiones I y II que aparecen en la tabla de la siguiente página y, para cada una de ellas:
   a) Encuentren la expresión algebraica de la regla que las genera.
   b) Busquen por lo menos dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a cada expresión que encontraron y anótenlas en su cuaderno.
   c) Justifiquen en su cuaderno por qué esas expresiones son equivalentes.
   d) En el caso de la sucesión I, comprueben en cada una de las expresiones si el término que ocupa el lugar 110 de la sucesión es 328.
   e) En el caso de la sucesión II, comprueben en cada una de las expresiones si el término que ocupa el lugar 210 de la sucesión es 839.

Sucesión	Posición del término						n (regla de la sucesión)
	1^{ro}	2^{do}	3^{ro}	4^{to}	5^{to}	6^{to}	
I	1	4	7	10	13	16	
II	3	7	11	15	19	23	

2. Comparen sus resultados con otra pareja y anoten todas las expresiones algebraicas diferentes que hayan encontrado. Verifiquen si son equivalentes y permiten obtener los términos de cada sucesión.

3. Completen las siguientes sucesiones de números y escriban una expresión algebraica que las genere.

Sucesión	Posición del término						n (regla de la sucesión)
	1^{ro}	2^{do}	3^{ro}	4^{to}	5^{to}	6^{to}	
III	–4	–8		–16		–24	
IV	–9		–3	0	3		

4. Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas que son equivalentes a la expresión que encontraron y, en su cuaderno, expliquen por qué lo son.

Sucesión III. Expresiones algebraicas equivalentes que la generan		
☐ $n - 5$	☐ $-2(2n)$	☐ $n - 5n$
☐ $5 - n$	☐ $-n - n - n - n$	☐ $-(4n)$

Sucesión IV. Expresiones algebraicas equivalentes que la generan		
☐ $3n - 12$	☐ $-n - n - n + (-12)$	☐ $3(n + 4)$
☐ $-12n + 3$	☐ $-3(n + 4)$	☐ $12n - 3$

Sucesiones de números decimales y fraccionarios

Sesión 2

1. Trabajen en pareja. Encuentren la regla de las sucesiones de números y dos expresiones algebraicas equivalentes.

Posición del término	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	n (regla de la sucesión)
Sucesión V	1	1.5	2	2.5	3	3.5	

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas equivalentes a la expresión que encontraron y expliquen en su cuaderno por qué lo son.

☐ $n + 0.5$	☐ $\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)$	☐ $0.5(n + 1)$

b) Busquen por lo menos otras dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a la expresión que anotaron como regla de la sucesión.

Expresión algebraica equivalente	Porque
1.	
2.	

c) Comparen sus resultados con otra pareja y anoten las expresiones algebraicas que hayan encontrado. Verifiquen que todas sean equivalentes. Para ello, comprueben si el número 50.25 es un término de la sucesión. ¿Qué número ocupa la posición 100 de la sucesión? ______________________________

2. Completen la siguiente sucesión de números y escriban una expresión algebraica que la genere.

Posición del término	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	n (regla de la sucesión)
Sucesión VI	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{24}$		$\frac{1}{36}$	

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas equivalentes a la expresión que encontraron para la sucesión 6 y, en su cuaderno, expliquen por qué lo son.

☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3n}\right)$	☐ $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n}\right)$	☐ $\frac{6}{n}$
☐ $\frac{n}{6}$	☐ $0.6n$	☐ $\frac{n^{-1}}{6}$

b) Verifiquen con cada una de las expresiones algebraicas equivalentes que la fracción $\frac{1}{300}$ sea parte de la sucesión. Si lo es, ¿qué posición ocupa? ________ ¿Cuál es el término que corresponde a la posición 25? ______________ ¿Y cuál es el de la posición 100? ______________

c) Marquen con una palomita (✓) las sucesiones numéricas equivalentes a la sucesión: $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \ldots$ y, en su cuaderno, expliquen por qué.

☐ $\frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{10}{12}, \ldots$

☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{2}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{4}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \ldots$

☐ $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\times\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\times\frac{1}{8}, \ldots$

☐ $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{15}\right), \ldots$

d) Comparen sus resultados con los de otra pareja.

3. Observen el recurso audiovisual *Operaciones algebraicas* para que recuerden algunas reglas de cómo escribir y operar con las literales y expresiones algebraicas.

4. Trabajen en pareja. Completen la siguiente sucesión de números y escriban la expresión algebraica que la genera.

Posición del término	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	7mo	*n* (regla de la sucesión)
Sucesión VII	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$		3	$\frac{15}{4}$	$\frac{9}{2}$		

a) Marquen con una palomita (✓) las sucesiones numéricas equivalentes a la sucesión anterior y, en su cuaderno, expliquen por qué.

☐ $\frac{3}{4}, \frac{6}{4}, \frac{9}{4}, \frac{12}{4}, \frac{15}{4}, \ldots$

☐ $0.75, \frac{6}{4}, 2.25, \frac{12}{4}, 3.75, \ldots$

☐ 0.75, 1.5, 2.25, 3, 3.75,...

☐ $\frac{75}{100}, \frac{150}{100}, \frac{225}{100}, \frac{300}{100}, \frac{375}{100}, \ldots$

5. Busquen y anoten otra sucesión de términos que sea equivalente a la sucesión que se genera con la expresión algebraica $\frac{3}{4}n$.

Posición del término	1^{ro}	2^{do}	3^{ro}	4^{to}	5^{to}	...
Sucesión VIII						

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas que son equivalentes a la expresión que encontraron y, en su cuaderno, expliquen por qué lo son.

☐ $3\frac{1}{4n}$	☐ $\frac{1}{4}(3n)$
☐ $\frac{3n}{4}$	☐ $3\left(\frac{1}{4}n\right)$

b) Busquen por lo menos otras dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a la expresión $\frac{3}{4}n$, anótenlas en su cuaderno y expliquen por qué lo son.

- Con cada una de las expresiones algebraicas equivalentes que encontraron verifiquen que el número 56.25 es parte de la sucesión. Si lo es, ¿qué posición ocupa? __________ ¿Cuál es la fracción que le corresponde? __________ ¿Cuál es el término que corresponde a la posición 50? __________ ¿Y cuál a la posición 150? __________

6. Con apoyo de su maestro, comparen sus respuestas con el grupo y, en caso necesario, corrijan.

Sesión 3

Para terminar

Más expresiones algebraicas

1. Anoten los primeros 5 términos de la sucesión de números que sigue la regla: $\frac{1}{4}n + \frac{1}{8}$

Posición del término	1^{ro}	2^{do}	3^{ro}	4^{to}	5^{to}
Sucesión IX					

a) Marquen con una palomita (✓) las expresiones algebraicas que son equivalentes a la expresión que encontraste y explica por qué lo son.

☐ $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)$	☐ $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right)$
☐ $\frac{n}{4}+\frac{1}{8}$	☐ $\frac{1}{4}\left(n^{-1}+\frac{1}{2}\right)$

b) Busquen por lo menos otras dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a la expresión $\frac{1}{4n}+\frac{1}{8}$, anótenlas en su cuaderno y expliquen por qué lo son.

c) Verifiquen que todas las expresiones sean equivalentes. Para ello, comprueben si los números $\frac{2}{15}$, $\frac{25}{200}$ y $\frac{41}{320}$ son términos de la sucesión y, de pertenecer a ella, observen en qué posición se encuentran.

2. Anoten los primeros 5 términos de la sucesión de números que sigue la regla: $\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}$

Posición del término	1ro	2do	3ro	4to	5to
Sucesión X					

a) Busquen por lo menos otras dos expresiones algebraicas que sean equivalentes a la expresión $\frac{2}{3}n+\frac{1}{3}$

Expresión algebraica equivalente	Porque
1.	
2.	

b) Verifiquen que todas las expresiones sean equivalentes. ¿Qué número ocupa la posición 90 de la sucesión? ____________ ¿Y cuál está en la posición 200? ____________

c) Comparen sus resultados y argumentos con los de otra pareja; si hay expresiones equivalentes que ustedes no encontraron, agréguenlas en su cuaderno.

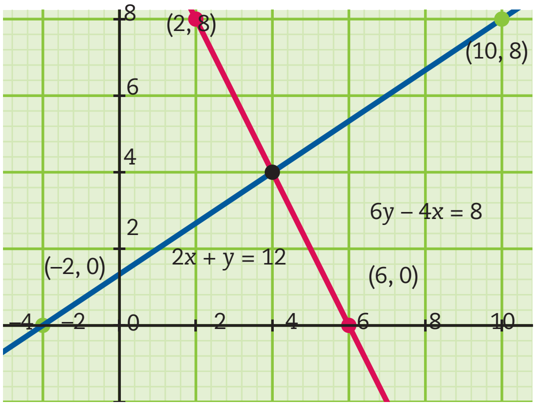
3. En grupo, y con apoyo de su maestro, a partir de lo trabajado hasta este momento describan algunas estrategias para encontrar expresiones equivalentes.

4. Utilicen el recurso informático *Sucesiones de números*, en el portal del proyecto Descartes, para resolver dudas que surjan sobre qué es una sucesión numérica, cuáles son sus elementos y dificultades para probar si las expresiones algebraicas propuestas como reglas que generan las sucesiones son o no equivalentes. En: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/1m_b01_t03_s02-JS/index.html

20. Sistemas de ecuaciones. Métodos de igualación y de sustitución

Sesión 1

Para empezar



En la secuencia 5 del primer bloque aprendiste a plantear un sistema de ecuaciones de dos incógnitas a partir de situaciones problemáticas que involucraban ciertas condiciones o limitantes, también lograste resolver tales sistemas mediante el método gráfico. En esta secuencia ampliarás tus conocimientos para resolver sistemas de ecuaciones de dos incógnitas con el empleo de algunos métodos algebraicos.

Manos a la obra

Igualar ecuaciones

1. Trabajen en pareja. Resuelvan en su cuaderno el siguiente sistema de ecuaciones mediante el método gráfico. Elaboren la tabla de valores y tracen en su cuaderno la gráfica para encontrar la solución.

Ecuación 1: $4x - y = 9$

Ecuación 2: $3x + 5y = 1$

a) La solución del sistema es el punto donde las dos rectas se intersecan, es decir, el punto común de las dos rectas, ¿cuál es la solución del sistema?

$x =$ ______________ $y =$ ______________

b) Como se observa, al elaborar la tabla de valores tuvieron que despejar la literal de ambas ecuaciones, dar valores arbitrarios a x, para obtener así el punto de intersección.

Valor de x	Valor de y en la ecuación 1 ($y = -9 + 4x$)	Valor de y en la ecuación 2 $\left(y = \frac{1-3x}{5}\right)$
2	–1	–1

Si el valor de y es el mismo para ambas ecuaciones, quiere decir que las expresiones son iguales o equivalentes y podemos igualarlas:

$$-9 + 4x = \frac{1 - 3x}{5}$$

c) Resuelvan la ecuación anterior y escriban el valor que obtengan de *x*. __________

d) Como se observa, al igualar las expresiones y resolver la ecuación que resulta, se obtiene el mismo valor para *x* indicado en la tabla. ¿Qué pueden decir de este valor con respecto a la gráfica? ______________________________

e) Sustituyan el valor de *x* en ambas ecuaciones y observen qué resulta.

Sustitución del valor de *x* en la ecuación 1 $4x - y = 9$	Sustitución del valor de *x* en la ecuación 2 $3x + 5y = 1$

2. En grupo y con ayuda de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

Una ecuación de primer grado con una incógnita es aquella que, como su nombre lo indica, tiene sólo un valor desconocido y su exponente es 1. La solución de esta ecuación es el valor que la hace cierta, esto es, que permite obtener la igualdad. Por ejemplo: $3x + 4 = 10$ es una ecuación de primer grado y sólo es verdadera cuando $x = 2$, lo que representa su solución.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas está formado por dos ecuaciones de primer grado que relacionan dos incógnitas. Cada ecuación representa una condición o restricción del problema, por lo que encontrar la solución significa obtener los valores de las incógnitas que resuelven o hacen verdaderas simultáneamente ambas ecuaciones.

En el problema anterior, donde el sistema de ecuaciones está formado por:

Ecuación 1: $4x - y = 9$

Ecuación 2: $3x + 5y = 1$

La solución es $x = 2$, $y = -1$, ya que satisfacen o hacen ciertas a ambas ecuaciones, esto es, hacen verdaderas ambas igualdades. Cuando se obtienen los dos valores, es conveniente verificar que ambos son la solución del sistema, sustituyendo esos valores en las dos ecuaciones para corroborar la igualdad.

3. Observen el recurso audiovisual *Operaciones algebraicas 2* y pongan atención en los aspectos importantes de la manipulación algebraica, por ejemplo en el significado de despejar una ecuación y cómo hacerlo.

4. En grupo y con apoyo de su maestro, lean y comenten la siguiente información.

Otra forma de resolver un sistema de ecuaciones consiste en despejar la misma literal (puede ser *x* o *y*) en ambas ecuaciones e igualar las expresiones que se obtienen. Al resolver la igualdad se obtiene el valor de la otra literal. Este procedimiento se denomina *Método de igualación*.

5. En pareja, resuelvan el siguiente problema, planteando primero el sistema de ecuaciones necesario y resolviéndolo por el método de igualación.

Leonora y Maribel fueron a la misma dulcería. Leonora compró cuatro paletas de caramelo y tres chocolates. Maribel compró tres paletas de caramelo y dos chocolates. Si Leonora gastó $48.00 y Maribel $34.00, ¿cuál es el costo de una paleta y el de un chocolate? Analicen y contesten las siguientes preguntas.

a) ¿Cuáles son las incógnitas de este problema? ______________________

b) En la tabla de la izquierda, planteen el sistema de ecuaciones que representa este problema.

Sistema de ecuaciones	
Ecuación 1	Ecuación 2

c) Despejen una de las dos incógnitas en ambas ecuaciones. En este caso, despejen *y*.

Despejar *y*	
Ecuación 1	Ecuación 2
$y =$	$y =$

d) Igualen las ecuaciones obtenidas: ______________ = ______________

e) Resuelvan en su cuaderno la ecuación de primer grado que se obtiene.

f) Sustituyan en cualquiera de las dos ecuaciones originales, el valor que se obtiene de la incógnita, en este caso de x para encontrar el valor de la otra incógnita (y).

g) Verifiquen que los valores obtenidos para las incógnitas cumplan con la igualdad en cada una de las ecuaciones del sistema.

6. Comparen con otros compañeros sus resultados. Revisen si obtuvieron las mismas ecuaciones y los mismos valores para x y y. Si no llegaron a lo mismo, comparen sus procedimientos en los pasos *c* a *f*. Luego, comenten en grupo y con su maestro si tuvieron alguna dificultad al resolver el sistema de ecuaciones por el método de igualación y señalen cuáles ventajas o desventajas tiene éste respecto al método gráfico.

Con otro método

1. Trabajen en pareja el siguiente problema.

En una clase de baile hay 30 alumnos entre hombres y mujeres. Los alumnos se organizaron para ir a un salón de baile a practicar y asistieron sólo 26. Se sabe que asistió el 75% de los hombres y todas las mujeres. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase de baile?

a) Encierren con un círculo el sistema de ecuaciones que corresponde al problema.

$x + y = 30$ $x + y = 26$	$x + y = 26$ $0.25x + 0.75y = 30$
$x + y = 30$ $0.75x + y = 26$	$x + y = 26$ $0.75x + 0.25y = 30$

b) De acuerdo con el sistema de ecuaciones que consideran correcto, ¿qué representa x? _________________ ¿Qué representa y? _______________________

c) Escriban en la tabla de la derecha las ecuaciones que obtuvieron al despejar y de cada ecuación.

Ecuación 1	Ecuación 2
$y =$	$y =$

d) Tomen la expresión que obtienen de despejar y de la primera ecuación y sustitúyanla en el lugar de y de la segunda ecuación. Comenten por qué este procedimiento es válido.

e) Resuelvan en su cuaderno la ecuación de primer grado que obtuvieron para encontrar el valor de x.

$0.75x +$ ______________________ $= 26$

Expresión que corresponde a y despejada de la ecuación 1

f) Determinado el valor de x, analicen cómo pueden obtener el valor de y. Consideren lo que trabajaron en la sesión 1.

g) Comparen con otros compañeros sus resultados. Revisen si obtuvieron las mismas expresiones al despejar y en las ecuaciones y los mismos valores para las dos incógnitas. Si no obtuvieron lo mismo, verifiquen sus procedimientos en los pasos *a*, *b* y c.

h) Comenten en grupo y con su maestro si tuvieron alguna dificultad al resolver el sistema de ecuaciones por el método de sustitución. Además, señalen las ventajas o desventajas que tiene este método respecto al método gráfico y al de igualación.

Otra forma de resolver un sistema de ecuaciones consiste en transformar las dos ecuaciones en una que tenga sólo una incógnita, es decir, convertirla en una ecuación de primer grado. Para ello se despeja una incógnita en una de las dos ecuaciones y la expresión obtenida se sustituye en la otra ecuación. Este procedimiento se denomina *Método de sustitución*.

2. Resuelvan en pareja el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución. Si requieren apoyo para operar algebraicamente y despejar las literales, pidan ayuda a su maestro.

Ecuación 1: $\frac{1}{2}a + 3b = 15$

Ecuación 2: $2a + \frac{1}{4}b = 13$

a) Despejen una de las dos incógnitas. En este caso, *a* de la ecuación 1: $a =$ ______________________

b) Sustituyan la expresión que equivale al valor de la incógnita *a* en la ecuación 2: $2(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_) + \frac{1}{4}b = 13$

c) Realicen en su cuaderno las operaciones indicadas en los incisos anteriores y reduzcan los términos semejantes para resolver la ecuación de primer grado que resulta:

d) Sustituyan, en cualquiera de las dos ecuaciones originales, el valor obtenido de la incógnita, en este caso de b, para encontrar el valor de la otra incógnita, es decir, a. Luego, resuelvan la ecuación de primer grado que resulta.

e) Comprueben que los valores obtenidos para las incógnitas satisfacen la igualdad en cada una de las ecuaciones del sistema.

3. En equipo describan en su cuaderno el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación y el de sustitución. Comparen sus resultados con otros compañeros y con ayuda de su maestro formulen en grupo un procedimiento.

¿Cuál es el método más conveniente?

1. Trabajen en pareja el siguiente problema.

En el grupo 2° B, han aprobado la asignatura de Inglés 50% de las alumnas y 80% de los alumnos, mientras que Matemáticas la aprobó 75% de las alumnas y 70% de los alumnos. Calculen el número de alumnas y de alumnos que hay en el grupo si el total de aprobados es 24 en Inglés y 26 en Matemáticas. Analicen y contesten las siguientes preguntas para resolver el problema:

	Inglés	Matemáticas
Alumnas	50%	75%
Alumnos	80%	70%
Total de estudiantes aprobados	24	26

a) ¿Cuáles son las incógnitas de este problema? Represéntenlas con las literales x, y.

x: ______________________ y: ______________________

b) Planteen el sistema de ecuaciones que representa este problema. Si necesitan, pidan apoyo a su maestro.

c) Resuelvan en su cuaderno el sistema, tanto por el método de igualación como por el método de sustitución.

d) Resuelvan el sistema de ecuaciones por el método gráfico y comprueben que los valores obtenidos sean correctos.

e) Si los valores obtenidos en los tres métodos no coinciden, revisen sus procedimientos. De ser necesario comparen resultados con otra pareja o pidan ayuda a su maestro.

2. Observen el recurso audiovisual *Métodos de igualación y sustitución para resolver sistemas de ecuaciones* e identifiquen las diferencias y similitudes entre ambos métodos.

3. Respondan en su cuaderno cuál de los dos métodos les parece más fácil y por qué.

4. En grupo, lean sus respuestas, escuchen y analicen con atención los argumentos que dan para justificar la elección que hicieron.

5. De manera individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que prefieras. No olvides comprobar que los valores obtenidos para las incógnitas sean correctos para ambas ecuaciones.

$$x + 4y = 1 \qquad 3x + 5y = 15 \qquad 5x + 2y = 1$$
$$2x + y = -5 \qquad 2x - 3y = -9 \qquad -3x + 3y = 5$$

6. Compara tus resultados con los de tus compañeros y, en caso de que no coincidan, revisen sus procedimientos o pidan apoyo a su maestro.

7. Utiliza el recurso informático *Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones 1* para ejercitarte en la resolución de sistemas de ecuaciones por diversos métodos.

21. Relación funcional 1

Sesión 1

Para empezar

Contrario a lo que muchos creen, en la cima de la montaña no escasea el oxígeno. La mezcla de gases en la atmósfera es la misma desde el nivel del mar hasta casi los 100 km de altitud. Entonces, ¿por qué a los alpinistas les resulta difícil respirar cuando escalan las cumbres más altas, al grado de necesitar tanques de oxígeno?

Como en el caso anterior, hay situaciones en que la variación de una cantidad depende de otra; a esto se le conoce como *relaciones funcionales*. Por ejemplo, la variación entre el costo de un producto y la cantidad que se compra de él; la distancia que recorre un automóvil y el tiempo en que realiza el recorrido; la variación de las medidas del ancho y largo de un rectángulo a partir de un área fija. En esta secuencia estudiarás situaciones que corresponden a variación lineal e inversamente proporcional a partir de su representación gráfica, tabular y algebraica.

Manos a la obra

Diversos tipos de variación

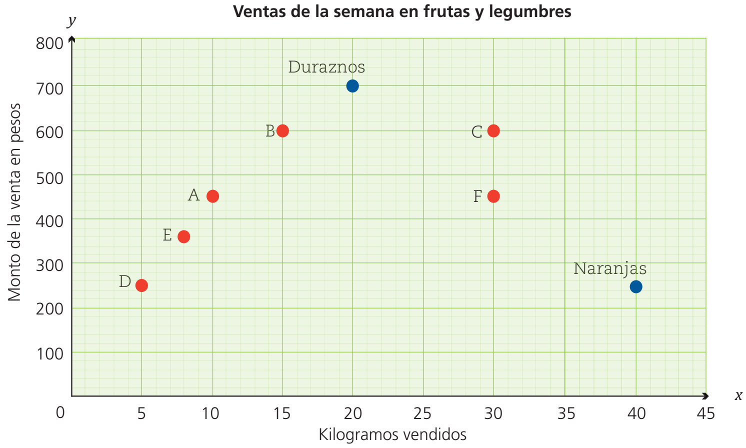
Dato interesante
La presión atmosférica y la altura están en una relación de proporcionalidad inversa; por ello, mientras más se sube en una montaña, más disminuye la presión y los pulmones parecen no tener suficiente "fuerza" para aspirar y expulsar el aire.

1. En equipo, realicen las actividades de esta sesión.

Antonio vende verduras y frutas como las que se ven en la imagen.

La gráfica de la página siguiente muestra la cantidad en kilogramos y el monto de venta en pesos de cada fruta que ha vendido durante la semana.

a) En cada punto de la gráfica, escriban el nombre de la fruta que le corresponde.



b) Antonio también vende duraznos y naranjas. En la gráfica anterior se muestra la cantidad de kilogramos y el monto de la venta de esas frutas durante la semana, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Márquenlas con una palomita (✓).

Afirmación	Verdadero
Entre más alto es el precio de una fruta, más alto está el punto en la gráfica que lo representa.	
Entre más kilogramos de fruta se vendan, más alto está el punto en la gráfica que lo representa.	
Si dos puntos están en la misma línea vertical, las frutas representadas por esos puntos tienen el mismo precio por kilogramo.	
Si dos puntos están en la misma línea horizontal, las frutas representadas por esos puntos tienen el mismo precio por kilogramo.	

2. Elaboren en su cuaderno una tabla y una gráfica que muestren los precios por cada kilogramo de la fruta que más vende Antonio.

a) Si se unieran los puntos, ¿qué forma tendría la gráfica? ______________________

b) ¿Qué tipo de variación hay entre el número de kilogramos de fruta vendidos y el monto en pesos? ______________________

c) Si se prolonga la línea que une los puntos hasta que corte al eje *y*, ¿en qué punto lo interseca? ____________ ¿Qué significado tendría ese valor en el eje en este contexto? ______________________

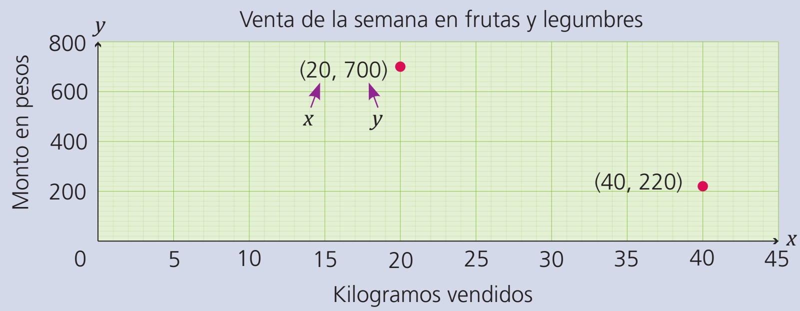
d) ¿Es posible que el monto de venta sea de $275? ______________________
¿A cuántos kilogramos vendidos corresponde? ______________________

e) ¿De qué manera se determina el monto de la venta? ______________________

____

3. Con ayuda de su maestro, revisen las respuestas obtenidas en las actividades anteriores. Después lean y comenten en grupo la siguiente información.

Los valores de las coordenadas de los puntos permiten comparar los datos de una gráfica. Así, entre más a la derecha esté un punto, mayor es el valor de la abscisa del punto (x). Entre más arriba esté un punto, mayor es el valor de la ordenada (y).



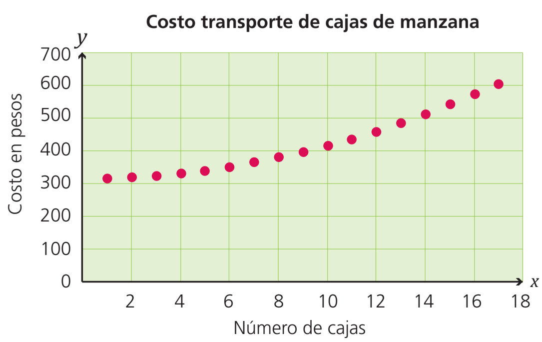
Sesión 2

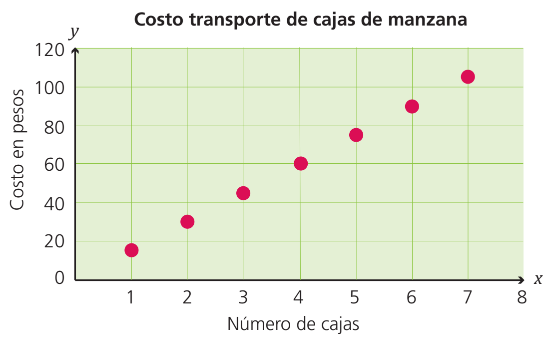
Más variaciones sobre un mismo tema

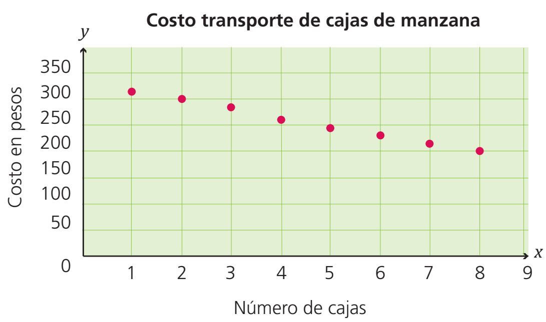
1. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión.

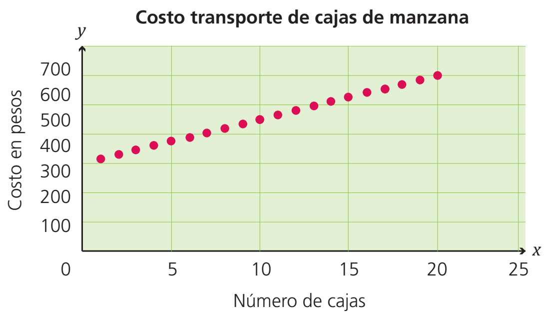
Antonio debe contratar un transporte para llevar a su puesto las cajas de manzana. Un transportista le cobra \$300, más \$15 por cada caja a transportar.

a) ¿Cuál de las gráficas representa esta situación? Enciérrenla en un círculo.









b) Si se prolonga la línea recta hasta cruzar el eje y, ¿en qué punto se interseca con él? ____________________

c) ¿Qué representa ese punto en el contexto de la situación? ____________________

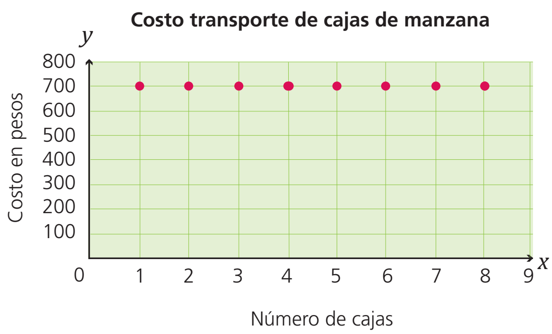
d) ¿Cuál es el valor máximo que puede tener en el eje x? ____________________

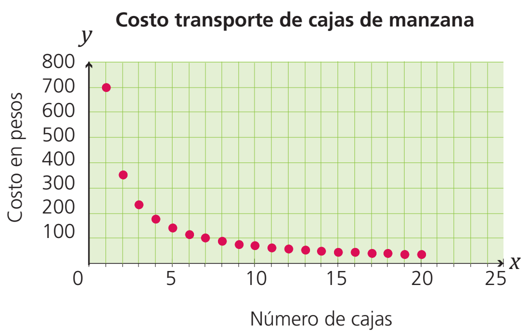
e) ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a esa situación? ____________________

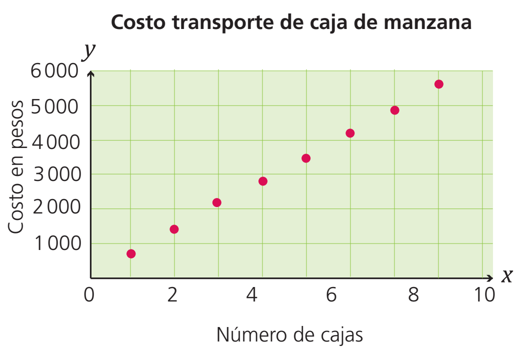
2. Otro transportista le cobra a Antonio \$700 por viaje y le ofrece una capacidad máxima de 60 cajas.

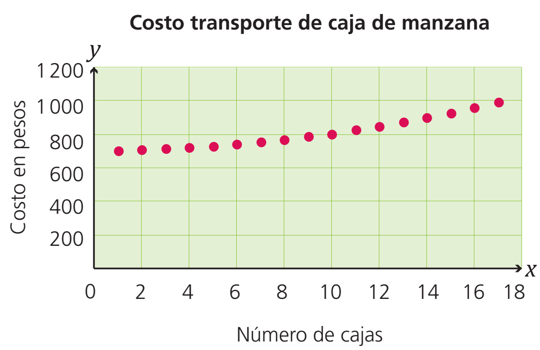
a) Antonio compara costos. Si transporta 5 cajas, ¿cuál será el costo por caja en la segunda opción? ____________________ ¿Y por 10 cajas? ____________________

b) ¿Cuál de las gráficas representa esta situación? Enciérrenla en un círculo.









c) Si Antonio compra regularmente 30 cajas de manzana a la semana, ¿cuál de los dos transportes le conviene contratar? ____________________

Justifiquen su respuesta. ____________________

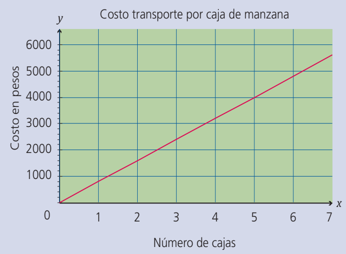
d) Comparen sus respuestas y resultados con otro equipo. Consideren el costo de la segunda opción y unan los puntos de la gráfica con una línea. Después contesten:

- ¿Es una línea recta? ____________
- ¿Qué le sucede a la gráfica conforme aumenta el número de cajas de manzana por transportar? Por ejemplo, si de 5 cajas pasa a 10, ¿cuál es el costo?

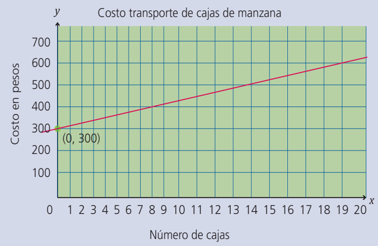
____

3. Lean y analicen con su maestro la siguiente información.

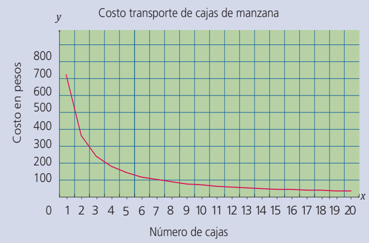
La gráfica de una relación de variación de proporcionalidad directa es una línea recta que siempre pasa por el origen.



La gráfica de una variación lineal también es una recta, pero no necesariamente pasa por el origen.



La gráfica de una variación que es inversamente proporcional es una curva que se llama **hipérbola**.



Al valor de la ordenada que interseca al eje y se le llama ordenada al origen.

4. Observen el recurso audiovisual *Diversos tipos de variación*. Pongan especial atención en las formas de variación que se muestran y en cuál es la diferencia entre ellas.

Sesión 3

Para terminar

Otras situaciones semejantes

1. En su cuaderno, tracen rectángulos con medidas de base y altura diferentes, pero que tengan como área 60 cm^2.

a) Completen la tabla de la izquierda con las dimensiones de los rectángulos que trazaron.

Familia de rectángulos de área 60 cm^2	
Base (x)	Altura (y)

b) De acuerdo con las dimensiones registradas, ¿cuál es el valor máximo, en números naturales, que puede tener la base del rectángulo?

En ese caso, ¿cuál es el valor de su altura? ______________________________

c) ¿Cuál es el valor máximo, en números naturales, que puede tener la altura del rectángulo? ________________ En ese caso, ¿cuál es el valor de su base?

____

d) Tracen en su cuaderno la gráfica con los valores obtenidos en la tabla y observen qué forma tiene.

e) Analicen si es posible que la medida de la base sea 6.5 cm y por qué. Observen cuál sería la medida de la altura.

f) Escriban si es posible que la medida de la base sea –6 cm y por qué.

g) Anoten también la expresión algebraica que representa la manera en que varía la altura (y) cuando la base (x) varía.

h) ¿Qué tipo de variación es? Justifiquen su respuesta.