5. Si en el caso del problema consideran que la incógnita x representa la cantidad de niños que asistieron a la exposición, y la incógnita y representa la cantidad de adultos, el sistema de ecuaciones del problema es el siguiente:

Ecuación 1: $x + y = 500$

Ecuación 2: $10x + 20y = 8\,000$

a) Justifiquen en su cuaderno por qué éste es el sistema correcto.

6. Observen el recurso audiovisual *¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas?* para que conozcan otros ejemplos de situaciones que se representan mediante ese tipo de sistema.

Para resolver el sistema

Sesión 3

1. Trabajen en pareja para encontrar la solución del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la actividad 5 de la sesión 2.

Ecuación 1: $x + y = 500$

Ecuación 2: $10x + 20y = 8\,000$

Donde las incógnitas son ________ y ________, y representan: ________________

a) Hagan una estimación de la solución del problema, ¿cuántos niños y cuántos adultos consideran que fueron a la exposición? ________________

b) ¿En qué se basa su estimación? ________________

c) ¿Piensan que el valor de x y y puede ser un número decimal? Discutan en grupo y con el maestro sus ideas.

2. Existen varios métodos para resolver un sistema de ecuaciones. Para comprender el método que aprenderán en esta sesión es importante que recuerden algunos conceptos que estudiaron en primer grado. Lean con atención la siguiente información y, si lo consideran necesario, consulten su libro de primero.

Una expresión algebraica de la forma $y = ax$ representa una variación lineal proporcional.

Una expresión algebraica de la forma $y = ax + b$ representa una variación lineal no proporcional.

En los dos casos anteriores, decimos que y está en función de x y que hay una relación funcional entre ambas cantidades. Además, ambas funciones se representan gráficamente con líneas rectas.

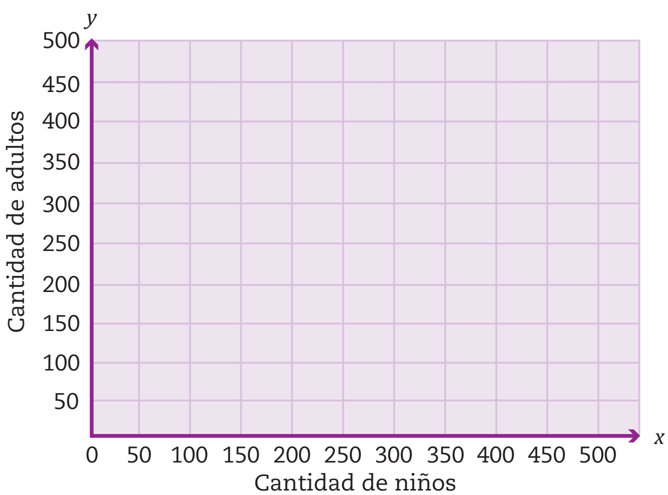
3. Escriban ahora las ecuaciones del problema de tal manera que, en cada una de ellas, la y esté despejada.

Ecuación 1: $y = 500 - x$ Ecuación 2: $y =$ ____________

4. Completen las siguientes tablas de valores para cada ecuación. Pueden utilizar una calculadora.

Ecuación 1 $y = 500 - x$	
x (Cantidad de niños)	y (Cantidad de adultos)
50	450
100	
150	
200	
250	
300	
350	
400	
450	
500	

Ecuación 2 $y =$ ______	
x (Cantidad de niños)	y (Cantidad de adultos)
50	375
100	350
150	
200	
250	
300	
350	
400	
450	
500	



5. Ubiquen en el siguiente plano cartesiano los puntos que corresponden a los valores de x y y obtenidos para ambas ecuaciones.

a) Observen la sucesión de puntos que corresponden a cada ecuación. ¿Hay alguno en común? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuáles son las coordenadas de ese punto?

Ecuación 1. Valor de x: ________ Valor de y: ________

Ecuación 2. Valor de x: ________ Valor de y: ________

b) Discutan qué significa ese punto en común.

- Sustituyan esos valores de x y de y en la Ecuación 1. ¿Qué observan?
- Sustituyan esos valores de x y de y en la Ecuación 2. ¿Qué observan?

c) De acuerdo con lo anterior, ¿cuántos niños y cuántos adultos asistieron a la exposición? ______________________________

Cuando las ecuaciones lineales de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se grafican en un mismo plano cartesiano, las gráficas se intersecan en un punto (x, y) que representa la solución del sistema, es decir, los valores de ese punto corresponden al valor de las incógnitas que resuelven el problema.

Por lo tanto, resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas significa encontrar los valores de las incógnitas que permiten que se cumpla la igualdad de cada ecuación del sistema.

Para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas existen diferentes métodos, uno de ellos se denomina método gráfico, que consiste en encontrar los valores de las incógnitas a través de una gráfica.

6. Resuelvan en equipo los siguientes sistemas de ecuaciones. Utilicen hojas cuadriculadas.

	I		II		III
Ec. 1	$2x + y = 4$	*Ec. 1*	$2x + y = 4$	*Ec. 1*	$2x + y = 4$
Ec. 2	$x + 2y = 5$	*Ec. 2*	$2x + y = 1$	*Ec. 2*	$4x + 2y = 8$

a) Elaboren las tablas necesarias considerando para x valores que vayan de -5 a 5. Si requieren ayuda para elaborar la tabla de valores, pidan apoyo a su maestro.

b) Una vez hechas las tablas de valores y las gráficas de cada sistema, contesten lo siguiente:

- ¿Pudieron resolver los tres sistemas? ______________
- ¿Qué soluciones encontraron en cada uno? Expliquen sus resultados señalando los valores para las incógnitas que resuelven el sistema o si no fue posible resolverlo. ______________________________
- Analicen los sistemas observando en el tercer sistema, por ejemplo, cómo es la Ecuación 2 respecto a la Ecuación 1.
- Anoten en el cuaderno sus conclusiones y discútanlas con el grupo.

Existen sistemas de ecuaciones que tienen una solución, la cual corresponde al punto donde se intersecan sus gráficas.

Hay sistemas de ecuaciones que no tienen solución y sus gráficas resultan ser líneas paralelas.

Cuando las ecuaciones tienen un número infinito de soluciones, las gráficas de ambas se superponen.

Sesión 4

Para terminar

Resolvamos otro problema

Ecuación 1 $y =$ ____	
x	y
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	

Ecuación 2 $y =$ ____	
x	y
0	
2	
4	
6	
8	
10	
12	

1. Soluciona el siguiente problema planteando el sistema de ecuaciones correspondiente, construyendo las tablas de datos y la gráfica para encontrar la respuesta. Esperanza tiene una mercería y su proveedor de listones le ha llevado listones nuevos: unos brillantes y otros opacos. Entre los dos tipos de listones, Esperanza compró 14 metros y pagó $180 en total. Si el metro de listón brillante cuesta $15 y el metro de listón opaco $10, ¿cuántos metros de cada uno compró Esperanza?

a) Establece en la siguiente tabla las incógnitas del problema.

Incógnita	¿Qué representa?
x	
y	

b) Establece el sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas del problema.

Ecuación 1: ____________ Ecuación 2: ____________

c) Escribe nuevamente las ecuaciones de tal manera que la y esté despejada.

Ecuación 1: $y =$ ____________ Ecuación 2: $y =$ ____________

d) Completa las tablas de datos de la izquierda para las ecuaciones 1 y 2.

e) Elabora en tu cuaderno la gráfica de cada ecuación en el mismo plano.

f) ¿Cuál es la solución del problema? ____________

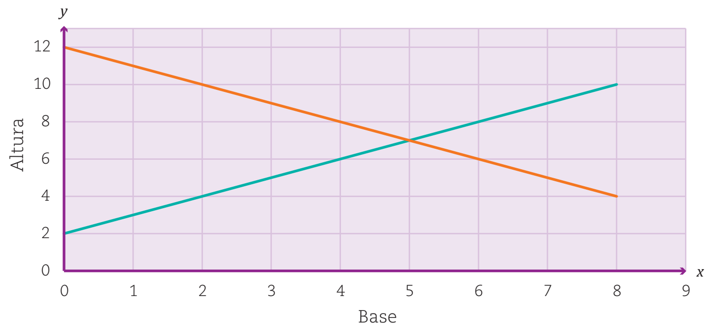
2. Comprueba en tu cuaderno que los valores obtenidos para x y y son válidos para ambas ecuaciones.

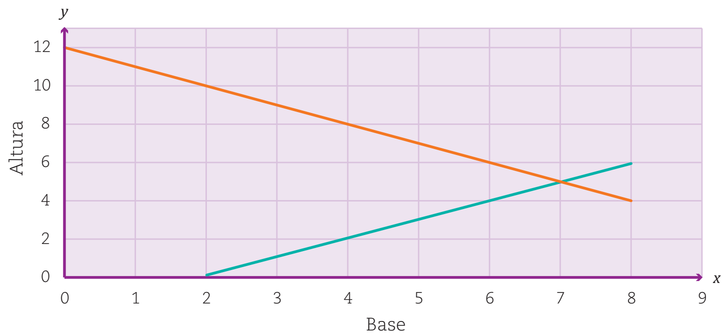
3. En equipo resuelvan el siguiente problema. Se tiene un rectángulo cuya altura mide 2 cm más que su base y el perímetro es igual a 24 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

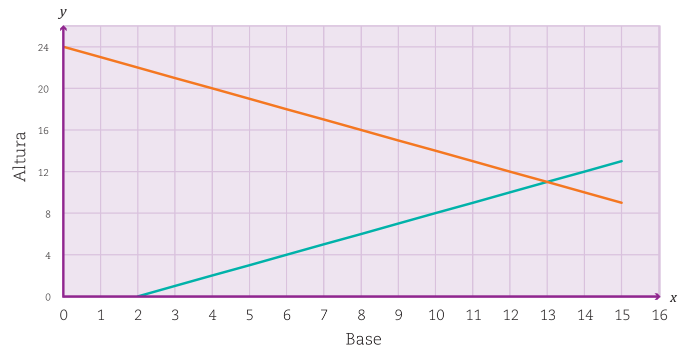
a) Si x es la medida de la base del rectángulo y y es la medida de la altura, indica cuál de los siguientes es el sistema de ecuaciones que representa el problema. ______

I	II	III
Ec. 1 $x - y = 2$	*Ec. 1* $x - y = -2$	*Ec. 1* $x - y = 2$
Ec. 2 $x + y = 24$	*Ec. 2* $x + y = 12$	*Ec. 2* $x + y = 12$

b) Encierren con un óvalo la gráfica que corresponde al sistema de ecuaciones correcto.







4. Comparen sus respuestas con otro equipo y argumenten por qué cada sistema y cada gráfica son correctos o incorrectos.

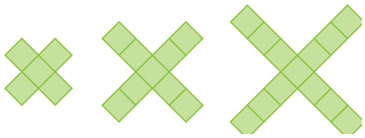
5. Observen el recurso audiovisual *Método gráfico*, con el que continuarán el estudio y la aplicación de este método para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

6. Utilicen el recurso informático *Solución de un sistema de ecuaciones como intersección de rectas* para continuar con el planteamiento y resolución de este tipo de sistemas. Encuéntrenlo en: https://www.proyectodescartes.org/Telesecundaria/materiales_didacticos/2m_b05_t03_s01_descartes-JS/index.html

6. Sucesiones y expresiones equivalentes 1

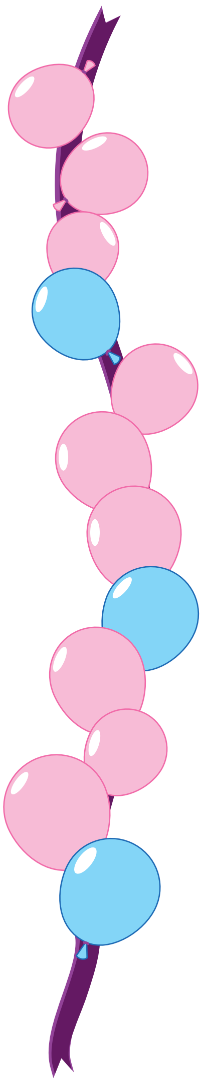
Sesión 1

Para empezar



En primer grado trabajaste con sucesiones numéricas o de figuras geométricas y determinaste algunos otros términos de esas sucesiones mediante la regla o patrón que siguen. Esa regla o patrón la describiste en lenguaje común y a través de una expresión algebraica. En esta secuencia ampliarás tu conocimiento de las sucesiones numéricas, particularmente que la regla que las genera puede expresarse de distintos modos.

Manos a la obra



¿De qué color?

1. Resuelve de manera individual el siguiente problema. Adriana va a decorar su salón de clases para un festejo y ha decidido hacer tiras de globos rosas y azules conforme el modelo que se observa a la izquierda.

   a) Describe el arreglo que tiene la tira de globos de arriba hacia abajo. ____________

   ____

   b) Adriana le pide ayuda a Paola para elaborar las tiras de globos y le señala en qué lugares debe colocar los globos azules. ¿Cómo le indicarías a Paola la manera de colocarlos? ____________________________

   c) Si se continúa con la tira de globos, ¿de qué color será el globo que ocupe el lugar 42? ____________ ¿Y el lugar 60? ____________

   d) Si la tira tendrá 100 globos, ¿cuántos globos azules necesitarán? ____________

   e) Compara tus respuestas con las de tus compañeros; en particular, comenten la manera en que describieron el arreglo de globos y acuerden un procedimiento o regla para saber de qué color es el globo en las posiciones que se indicaron.

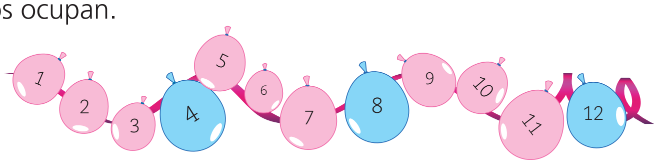
   f) Escriban a continuación el procedimiento o regla que acordaron. ____________

   ____

Seguiremos trabajando con sucesiones numéricas. Ahora obtendrás y escribirás la regla que las determina, mediante dos o más expresiones algebraicas equivalentes.

2. Reúnete con un compañero para realizar las siguientes actividades de esta secuencia.

En lugar de globos azules, Adriana y Paola utilizan números para designar el lugar que aquéllos ocupan.



a) ¿Cuál es la sucesión que se obtiene con los números de los globos azules? ________________

____

b) Escriban en su cuaderno una expresión algebraica que represente la sucesión.

3. Comparen con otra pareja la regla que escribieron (expresión algebraica).

a) ¿Son iguales? ________________ ¿Ambas representan lo mismo? ________________

b) Reflexionen cómo pueden saberlo y determinen si ambas expresiones corresponden a la situación.

4. Si conocemos la regla, podemos saber en qué posición de la tira el globo será de color azul. Analicen la siguiente tabla y complétenla utilizando la regla algebraica para responder las preguntas.

Número que tienen los globos azules en la tira	4	8	12	16						
Posición de los globos azules en la tira	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n

a) ¿En el lugar 27 de la tira Paola colocará un globo azul? ________________

¿Por qué? ____

b) El décimo globo azul que Paola use, ¿en qué lugar de la tira estará? ____________

5. En la siguiente tabla hay reglas algebraicas. Calculen los seis primeros términos de la sucesión que representa cada una. Identifiquen con cuál o cuáles también se genera la sucesión 4, 8, 12, 16, …

Regla (expresión algebraica)	Valores de n					
	1	2	3	4	5	6
$5n - n$						
$3n + 1$						
$2(2n)$						
$3n + n$						
$n + 4$						

6. Compartan y revisen sus respuestas. Marquen las reglas que generan la misma sucesión de números y verifíquenlos.
   a) ¿Qué pueden decir de las expresiones que generan la misma sucesión? ______

   ______
   b) ¿Cómo se llaman esas expresiones? ______

7. Junto con su maestro lean la siguiente información y coméntenla.

Una sucesión es un arreglo de números o elementos que siguen una regla o patrón. Los elementos que forman una sucesión se llaman *términos*. Los términos de una sucesión pueden calcularse mediante una regla o patrón que puede describirse con una expresión algebraica.

Si la regla o el patrón de una sucesión de números es $3n - 2$, la literal n simboliza cualquier posición de un término en la sucesión. Además, **puede haber más de una manera de expresar la regla que genere o permita analizar una sucesión**.

Sesión 2

La tarea de matemáticas

1. En pareja resuelvan el siguiente problema. Ana, Bertha, Carlos y Diego hacen su tarea de matemáticas. El maestro les ha pedido encontrar las expresiones algebraicas que generan algunas sucesiones de números. La primera es 6, 9, 12, 15, …

   Cada uno propone una expresión algebraica para luego comparar sus resultados y discutir cuál es la respuesta correcta. Las expresiones que propusieron son las siguientes:

Ana:	$3(n + 1)$	**Carlos:**	$(n)(n) + 5$
Bertha:	$5n + 1$	**Diego:**	$3n + 3$

   a) ¿Cuáles de las expresiones algebraicas anteriores son correctas? Para cada una, expliquen por qué es o no es correcta.

La expresión algebraica de Ana es ______
correcta/incorrecta

porque ______

La expresión algebraica de Carlos es ______
correcta/incorrecta

porque ______

La expresión algebraica de Bertha es ______
correcta/incorrecta

porque ______

La expresión algebraica de Diego es ______
correcta/incorrecta

porque ______

b) Si encontraron más de una expresión correcta, ¿cómo saben si es correcta o no?

____

c) Expliquen por qué esto es posible: ______________________________

2. Daniel y sus compañeros tienen que resolver la siguiente sucesión 10, 12, 14, 16, … Ana propone $2n + 8$ como una expresión algebraica de la regla de la sucesión. Al verla, Daniel comenta: “Entonces otra expresión para esa sucesión puede ser: $n + 4$”.

a) ¿La expresión que propuso Ana es correcta? _______________________

¿Por qué? ____

b) ¿La expresión que propone Daniel como otra forma de enunciar la misma regla es correcta? _________ ¿Por qué? ____________________________

c) Discutan en pareja y argumenten sus respuestas. Al final escriban dos expresiones que representen la misma regla y que sean correctas para la sucesión de números.

__________________ es igual a __________________

Expresión algebraica 1 Expresión algebraica 2

3. Trabajen en pareja las actividades de esta sesión. Encuentren la regla de la siguiente sucesión de números.

Términos de la sucesión	–10	–8	–6	–4						
Posición que ocupa el término en la sucesión	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n

4. De las siguientes expresiones algebraicas comprueben cuáles también representan la regla de la sucesión y por lo tanto son equivalentes:

Expresión algebraica	¿Es una expresión algebraica de la regla de la sucesión?
$n - 11$	
$-2n - 8$	
$2(n - 6)$	
$-4n - 2$	
$2n - 12$	

a) Si el término 15° de la sucesión es 18, comprueben que las reglas que obtuvieron son correctas.

5. Comparen y revisen sus respuestas con las de sus compañeros. Lean y comenten la siguiente información.

Al analizar una sucesión numérica para encontrar la expresión algebraica de la regla es posible encontrar más de una expresión algebraica equivalente.

Dos expresiones algebraicas son equivalentes cuando se cumple la igualdad entre ambas expresiones y se puede comprobar numéricamente cuando se le asigna cualquier valor a las literales que intervienen. Por ejemplo: $3n + 6$ es equivalente a $3(n + 2)$, porque al asignar un valor a n, por ejemplo 5, las dos expresiones nos dan el mismo resultado:

$$\mathbf{3n + 6 =} 3(5) + 6 = 15 + 6 = \mathbf{21}$$

$$\mathbf{3(n + 2) =} 3(5 + 2) = 3(7) = \mathbf{21}$$

6. Observen el recurso audiovisual *Expresiones algebraicas equivalentes* para conocer otras sucesiones numéricas que tienen dos o más expresiones algebraicas equivalentes y la manera de comprobarlo.

Sesión 3

Para terminar

Más sucesiones

1. Observen el recurso audiovisual *Operaciones algebraicas* para que recuerden algunas reglas de escritura y de cómo operar con las literales y las expresiones algebraicas.

2. Lean la siguiente información y analícenla con ayuda de su maestro.

En la transformación de expresiones equivalentes es importante que:

a) Al sumar consideres:

$$3a + b = b + 3a$$
$$(3a + b) + c = 3a + (b + c) = 3a + b + c$$
$$3a + 0 = 3a$$
$$3a - b = 3a + (-b)$$

b) Al multiplicar consideres:

$$3ab = 3ba$$
$$(3ab)c = 3a(bc)$$
$$3a(b + c) = (3ab) + (3ac)$$
$$1 \times 3a = 3a$$

3. Revisen los procedimientos que han realizado para encontrar las expresiones algebraicas equivalentes que corresponden a las reglas que generan las sucesiones. De igual forma, identifiquen cómo utilizaron esta información.

4. Resuelvan en pareja esta actividad. A partir de la siguiente expresión algebraica, que representa la regla de una sucesión de números, encuentren por lo menos seis expresiones equivalentes: $5n + 3$

a) $n + n + n + n + n + 3$
b) $2n + n + n + n + 3$
c) ____________________
d) ____________________
e) ____________________
f) ____________________

- ¿Cuál es la sucesión que se genera con estas expresiones? ________________
- Verifiquen que con todas se obtenga la misma sucesión de números.

5. De las siguientes expresiones algebraicas obtengan por lo menos dos expresiones equivalentes y la sucesión de números que generan.

Expresiones algebraicas equivalentes			Sucesión numérica
$2(n - 2)$			
$3(n + 1) + n$			
$4n - 2(n + 3)$			
$-5n - 10$			

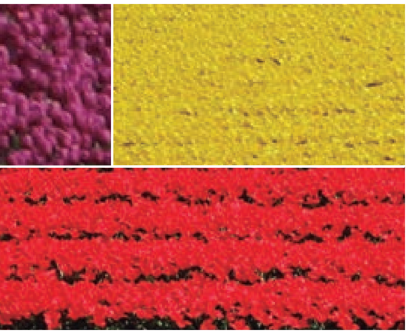
6. Encuentren dos expresiones algebraicas equivalentes para las siguientes sucesiones de números o expresiones algebraicas.

Sucesión	Expresiones algebraicas equivalentes	
	1	2
10, 18, 26, 34, …		
70, 64, 58, 52, …		
–4, 0, 4, 8, …		
–24, –27, –30, –33, …		
$(9n - 5) + (3n + 1)$		
$(3n - 4) - (n - 2)$		

7. Figuras geométricas y equivalencia de expresiones 1

Sesión 1

Para empezar



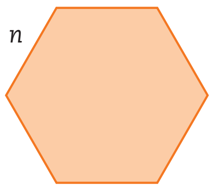
En la imagen se observa un campo de tulipanes dividido en parcelas. En cada una se cultivó un color diferente de esas flores. ¿Cómo calcularías la superficie total de ese campo? ¿Hay más de una manera para conocer su área total? ¿Existen otras formas para calcular el área de cada parcela? ¿Cómo saber cuáles son equivalentes? ¿Las expresiones equivalentes darán el mismo resultado? Al finalizar el estudio de esta secuencia podrás contestar estas preguntas.

Manos a la obra

Distintas expresiones, mismo resultado

1. Realicen en pareja las actividades de esta sesión. Observen las siguientes figuras geométricas y para cada una escriban dos expresiones algebraicas equivalentes que permitan calcular sus perímetros.

Figura 1



Expresión 1: ____________

Expresión 2: ____________

Figura 2

Expresión 1: ____________

Expresión 2: ____________

2. Intercambien sus resultados con otra pareja. ¿Obtuvieron las mismas expresiones algebraicas en cada figura? En caso de que sean diferentes, ¿cómo verificar que son equivalentes? Realicen la comprobación en sus cuadernos.

3. Observen las siguientes figuras. Supongan que ambas tienen las mismas medidas.

Figura 3

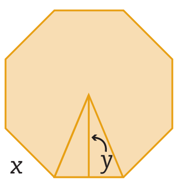
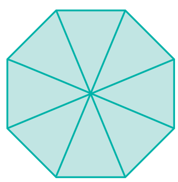
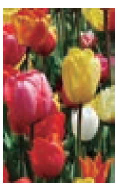


Figura 4



Dato interesante

Tulipán proviene del persa *delban*, que significa "turbante". Esta flor ha sido muy importante para los Países Bajos, pues es el cuarto producto que más exporta, al comerciar casi 3 000 millones de bulbos cada año.



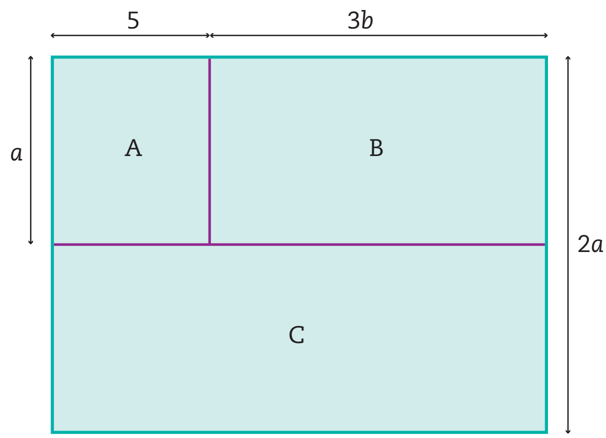
a) Encuentren una expresión algebraica para el área de cada una. Consideren que la figura 4 está compuesta por triángulos del mismo tamaño.

Figura 3: ______________________ Figura 4: ______________________

b) ¿Obtendrán la misma área para las dos figuras con las dos expresiones distintas?

c) ¿Cómo verificar que se obtiene la misma área? Justifiquen sus respuestas en su cuaderno.

4. Observen la siguiente figura. Es una representación del campo de tulipanes, en la cual se identifican con letras las diferentes parcelas y se señalan algunas de sus dimensiones.



a) ¿Cómo expresarían el área de la parcela A?

____

b) ¿Cuál sería la expresión para el área de las otras dos parcelas?

B: ______________ C: ______________

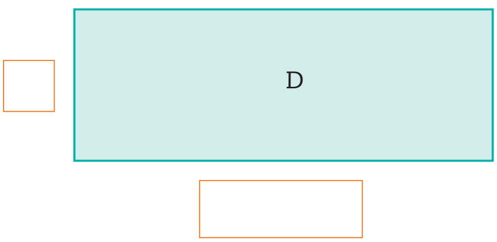
5. Imaginen que el área de las parcelas A y B se juntan. Nombren a esta nueva parcela como D y luego anoten sus dimensiones en los recuadros de la figura de abajo.

a) Escriban la expresión algebraica que representaría el área de la parcela D.

____

b) ¿Cómo expresarían la suma de las áreas de las parcelas A y B?

____



c) ¿Son equivalentes las expresiones algebraicas de los dos incisos anteriores? ______________________

¿Por qué? ______________________________

6. Consideren los siguientes valores y completen la tabla calculando lo que se pide: $a = 2$; $b = 3$.

Parcela	Área	
	Expresión algebraica	Valor
A		
B		
A + B		
D		

a) Establezcan la igualdad de las expresiones con las que obtuvieron la misma área y escríbanla en su cuaderno.

b) Asignen otros dos valores a cada literal de las expresiones que acaban de escribir. Verifiquen si, con cada uno de esos valores, se sigue cumpliendo la igualdad.

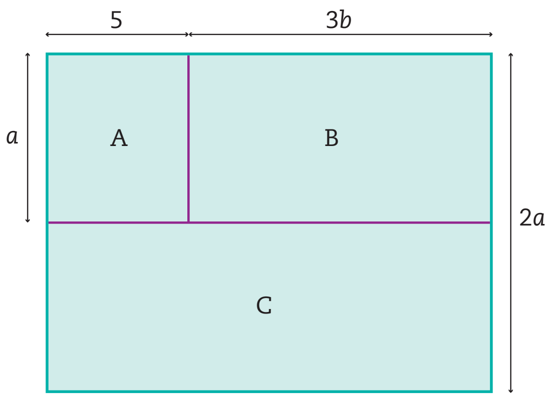
c) ¿A qué creen que se deba? Justifiquen su respuesta en su cuaderno.

7. Comparen sus resultados con los de otra pareja. Si obtuvieron expresiones distintas, verifiquen que con éstas también se obtengan los mismos resultados.

Sesión 2

Expresiones equivalentes para perímetros y áreas

1. Formen un equipo para realizar las siguientes actividades. Regresemos al problema del campo de tulipanes. Ya se calculó una parte de su área, ahora obtengan el área total tomando como base el procedimiento que utilizaron anteriormente.



a) Obtengan la expresión algebraica con la que se determina el área de *todo* el campo de tulipanes, utilizando sólo las medidas de cada uno de sus lados. ________________

b) Encuentren otra expresión algebraica distinta con la que se pueda calcular la misma área. ____________________

c) Verifiquen las equivalencias de ambas expresiones asignando una serie de valores numéricos. Pueden auxiliarse de una tabla como la siguiente:

Valores		Áreas	
		Primera expresión:	Segunda expresión:
a	*b*		

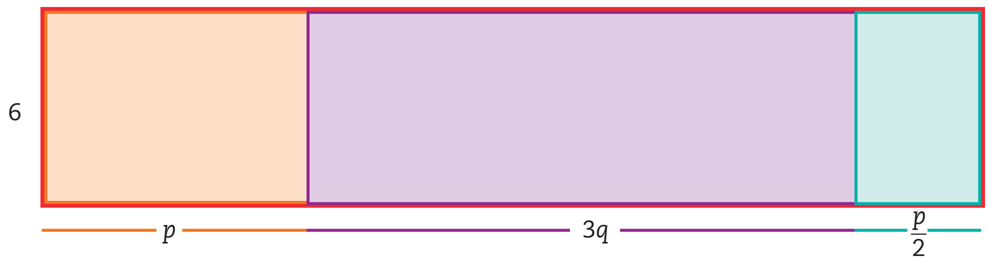
2. Intercambien sus respuestas con las de otro equipo. ¿Obtuvieron las mismas expresiones algebraicas? En caso de que sean distintas, comprueben que se llegue al mismo resultado con cualquiera de las expresiones que obtuvo el otro equipo.

Dos expresiones algebraicas son equivalentes si para cualquier valor que se les asigne a sus literales se obtiene el mismo resultado. Por ejemplo, en estas dos expresiones:

$2(a + b) + 3(a + 5) = 2b + 5(a + 3)$, al asignarle a la literal a el valor de 1 y a b el de 3, se obtendrá una identidad.

$$2(1 + 3) + 3(1 + 5) = 6 + 5(1 + 3)$$
$$8 + 18 = 6 + 20$$
$$26 = 26$$

3. Observen el siguiente dibujo.



a) Escriban dos expresiones algebraicas equivalentes para obtener el perímetro del rectángulo exterior, señalado en rojo.

Expresión algebraica 1	=	Expresión algebraica 2

b) Dividan el equipo en dos y trabajen en su cuaderno. La mitad del equipo verificará que las expresiones algebraicas sean equivalentes transformando la primera expresión en la segunda; mientras la otra parte del equipo transformará la segunda expresión algebraica en la primera. Anoten los pasos debajo de la expresión que le corresponde.

c) Supongan que, en determinado momento, ustedes obtuvieron las siguientes expresiones:

$12 + 2\left(p + 3q + \frac{p}{2}\right) = 3(2q + p + 4)$	$6\left(p + 3q + \frac{p}{2}\right) = 18p + 36q$

d) ¿Ambas expresiones son equivalentes? Para contestar la pregunta, escriban el posible desarrollo de cada expresión.

e) Si algunas de las expresiones no son equivalentes, identifiquen por qué no lo son y justifíquenlo en su cuaderno.

4. De manera grupal y con ayuda de su maestro, escriban en el pizarrón y en su cuaderno la igualdad que relaciona las expresiones algebraicas obtenidas en este ejercicio. Verifiquen en su cuaderno que con ambas expresiones se obtiene el mismo resultado.

5. Lean y comenten la siguiente información.

Una forma de saber si dos expresiones son equivalentes sin tener que asignar valores a sus literales consiste en utilizar las propiedades de reducción de términos semejantes y de agrupación. Veamos este ejemplo:

$$4xy + 2xz - 3xy + 5xz - yz = y(x - z) + 7xz.$$

Si partimos de la expresión algebraica de la izquierda, mediante la reducción de términos semejantes y las propiedades de agrupación obtendremos la expresión de la derecha.

- Se reducen términos semejantes: $xy + 7xz - yz$.
- Y luego por las propiedades de agrupación se tiene: $y(x - z) + 7xz$.

6. Observen el recurso audiovisual *Figuras geométricas y expresiones equivalentes*, con el cual ampliarán su conocimiento sobre este tema.

Sesión 3

Para terminar

Problemas diversos

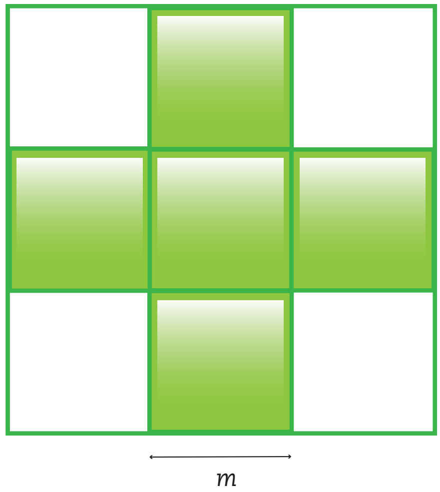
1. Resuelvan en parejas los siguientes problemas. Con base en la definición de expresiones equivalentes, se puede deducir que dos expresiones *no son equivalentes* si existe un valor con el que se obtengan distintos resultados para cada una de las dos expresiones.

a) Determinen si las expresiones de cada fila son equivalentes o no, y por qué.

Expresión 1	Expresión 2	¿Son expresiones equivalentes? ¿Por qué?
$(x + 2) + (x + 3) + (x + 4)$	$3x + 12$	
$3a(x - 6 + b)$	$3ax - 9a + 3b$	
$ah + ah + 2a$	$2a(h + 1)$	

b) Para aquellas expresiones que sean equivalentes, hagan en su cuaderno un diagrama geométrico que represente la misma área o el mismo perímetro.

2. La imagen está formada sólo por cuadrados que miden *m* de lado.



a) Escriban dos expresiones equivalentes para calcular el perímetro de la cruz que se forma con los cuadrados verdes.

________________________ y ________________________

b) Escriban dos expresiones equivalentes para calcular el área total de los cuadrados en color blanco. ____________ y ____________

c) Verifiquen la equivalencia de todos los pares de expresiones asignando valores numéricos a las literales de las expresiones de los incisos anteriores.

________________________ y ________________________

3. Intercambien con otra pareja los resultados de la actividad anterior y respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Escribieron las mismas expresiones algebraicas para el perímetro? ____________ Si fueron diferentes, anótenlas y verifiquen que sean equivalentes.

b) ¿Obtuvieron las mismas expresiones algebraicas para el área? ______________ Si fueron diferentes, anótenlas y verifiquen que sean equivalentes.

Perímetro	Área

4. Resuelve los problemas que se presentan en el recurso informático *Expresiones equivalentes 1*, para seguir obteniendo y verificando la equivalencia de expresiones algebraicas al asignar valores numéricos a las expresiones.

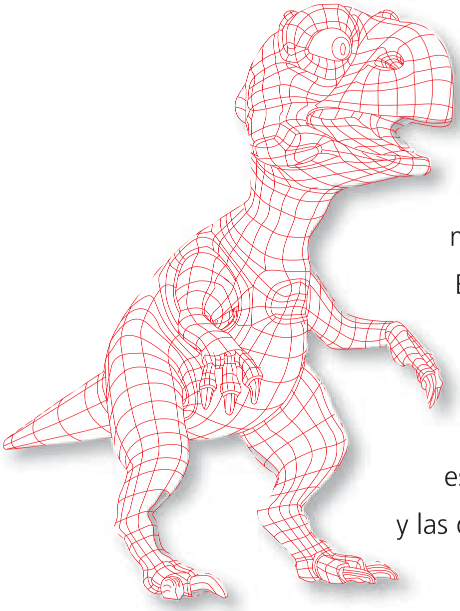
5. Realiza el siguiente problema de manera individual. Elabora un dibujo geométrico para la expresión $(x + 3)(y + 8)$, y obtén dos expresiones equivalentes para su área y su perímetro.

Sin asignar valores, comprueba en tu cuaderno que las dos expresiones que escribiste para el área y el perímetro son equivalentes.

8. Polígonos 1

Sesión 1

Para empezar



En el diseño de animaciones en 3D se usan mallas (o redes) de polígonos para darles forma a las superficies de los objetos. En la figura se aprecia la manera en que las mallas determinan la superficie de cualquier objeto. Mientras más fina, mejor será la definición en pantalla.

El uso de polígonos y sus propiedades permiten la manipulación de estos modelos (redes), y reducen considerablemente la cantidad de datos y operaciones de procesamiento para generar imágenes reales o de realidad aumentada. En esta secuencia estudiarás algunas características y propiedades de los ángulos y las diagonales en polígonos.

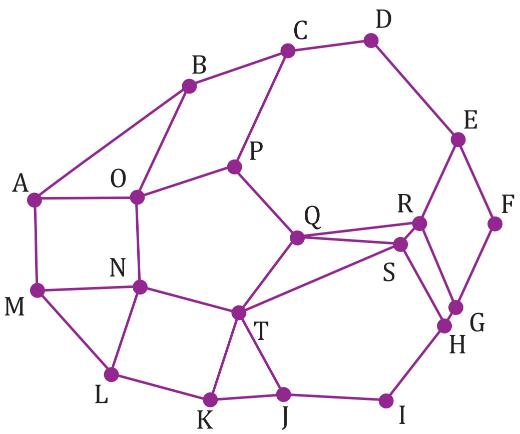
Manos a la obra

La red de polígonos

1. Trabajen en pareja. Observen la imagen y realicen lo que se indica.

a) Mencionen al menos tres polígonos que reconozcan.

______________ ______________ ______________



Red de polígonos.

b) ¿Qué tipo de triángulo es QST? __________

____

c) ¿Y el MNL? ____________________

d) Hay polígonos de 10 o más lados. Remarquen con distintos colores al menos dos.

e) ¿Cuál es el polígono con más lados que pueden identificar? Anoten los vértices que lo determinan. ____________________

2. Consideren la misma red de polígonos para completar la siguiente tabla. Deben identificar y anotar los vértices de los polígonos que la forman de acuerdo con las características que se enuncian en la tabla, o describir las características que le corresponde al polígono indicado.

Característica	Polígonos con todos sus lados iguales entre sí, pero no todos sus ángulos son iguales.		Polígonos que tienen todos sus ángulos iguales entre sí, pero no todos sus lados son iguales.	
Polígono		QRS, SHIJT, AOB		MNL, TKLN

3. Los **polígonos** se clasifican, según la medida de sus lados y ángulos, en **regulares** o **irregulares**. En la red de polígonos anterior, identifiquen los polígonos que a continuación se nombran y dibujen cada uno de ellos en la columna correspondiente.

a) BCPO
c) EFGR
e) OPQTN
b) HIJTQS
d) MNL
f) AONM

Glosario
Polígono regular: tiene todos sus lados y sus ángulos iguales entre sí. Cuando un polígono no cumple con ambas características, se le llama **polígono irregular.**

¿Cuáles son polígonos regulares?	¿Cuáles son polígonos irregulares?

4. Comenten y comparen con otro equipo lo siguiente:

a) La manera en que identificaron y clasificaron cada polígono de la actividad 1.

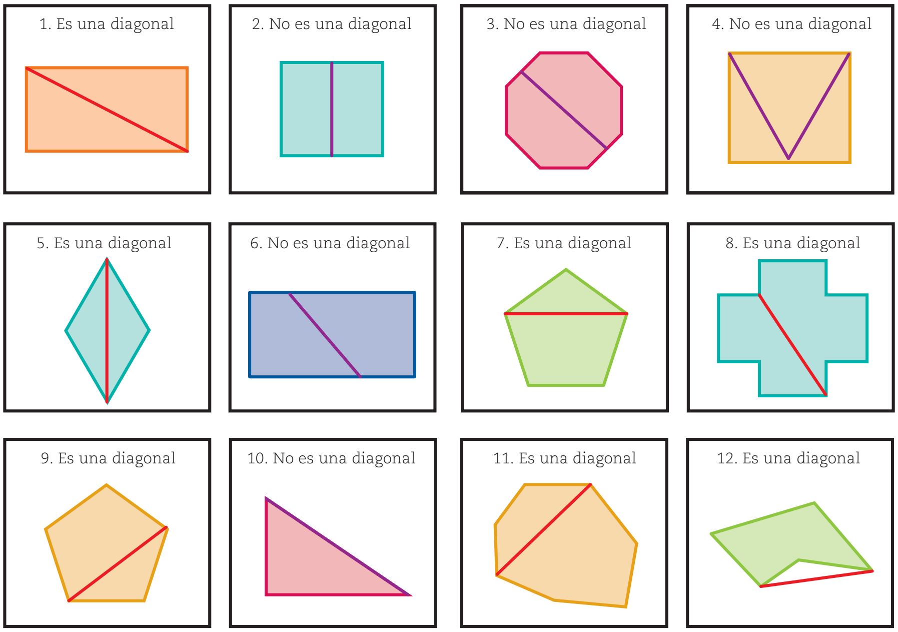
b) Los resultados de la clasificación de polígonos regulares e irregulares de la actividad 2. En caso necesario, analicen en qué características de los polígonos se equivocaron y corrijan sus respuestas.

5. Observen y analicen el recurso audiovisual *Polígonos* para recordar cuando un polígono es regular o irregular, así como algunas de sus características y propiedades.

Sesión 2

¿Qué línea sí es diagonal?

1. En equipo, observen las siguientes imágenes, unas muestran un polígono con alguna de sus diagonales y otras muestran ejemplos de lo que no es una diagonal.



Glosario
Contraejemplo: es un caso específico que demuestra que un enunciado es falso. Por ejemplo, el número 5 es un contraejemplo para “Todos los números son pares”.

2. En la tabla hay algunas afirmaciones que indican cuándo la línea es una diagonal. Consideren lo anterior para determinar si son verdaderos o falsos. Justifiquen sus respuestas y den un ejemplo o un **contraejemplo** para cada caso.

Afirmación Una diagonal es…	**Verdadero o falso**	**¿Por qué?**	**Ejemplo o contraejemplo** (Anota el número de la imagen)
toda línea inclinada dentro de un polígono.			
un segmento que pasa por el centro de un polígono.			
una línea recta que une dos vértices no consecutivos.			
un segmento que siempre divide en dos partes iguales a un polígono.			

3. Consideren la siguiente red de polígonos para completar las frases con sí o no, según corresponda.

El segmento CKE __________ es diagonal del polígono
sí/no

ABCDE porque ______________________________

El segmento DC __________ es diagonal del polígono
sí/no

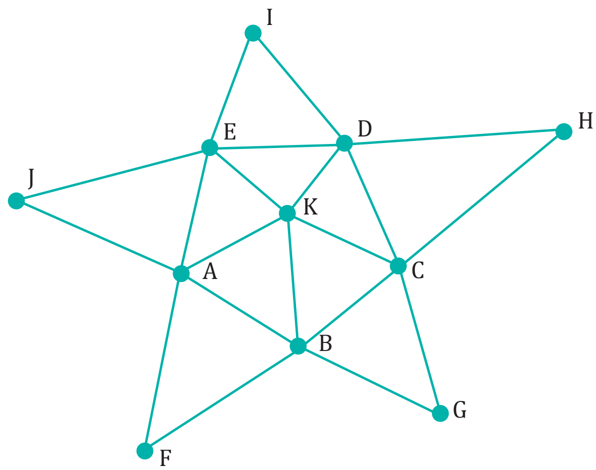
ABCDE porque ______________________________

El segmento ED __________ es diagonal del polígono
sí/no

IDHCGBFAJE porque ___________________________

El segmento DE __________ es diagonal del polígono
sí/no

ABCDKE porque ______________________________



4. Escriban una definición de *diagonal* de un polígono. Luego, intercámbienla con otro equipo para que la revisen y validen. Si es correcta, tracen un ejemplo; en caso contrario, den un contraejemplo.

5. En grupo, revisen sus respuestas a las actividades anteriores. Después lean y comenten lo siguiente.

Una diagonal de un polígono es un segmento de línea que une dos vértices no consecutivos.

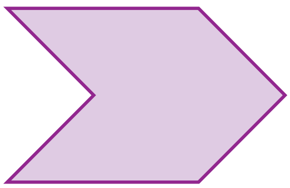
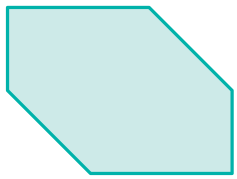
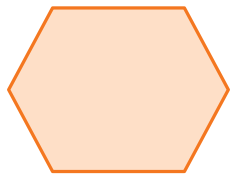
6. Observen el recurso audiovisual *¿Qué es una diagonal?* para conocer más sobre este concepto.

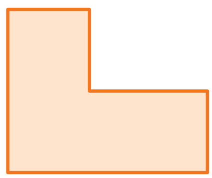
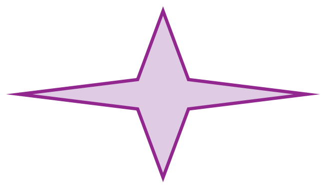
¡Cuántos triángulos!

1. Reúnete con un compañero para trabajar las actividades de esta sesión. Lean y comenten la siguiente información.

> Un polígono es convexo cuando al trazar todas sus diagonales, éstas quedan **dentro de él**. Cuando al menos una diagonal no queda completamente dentro del polígono, se dice que el polígono es no convexo.

2. Tracen las diagonales de los siguientes polígonos y, con base en la definición anterior, determinen si los siguientes polígonos son convexos o no convexos. Anótenlo en la línea que está debajo de cada uno.

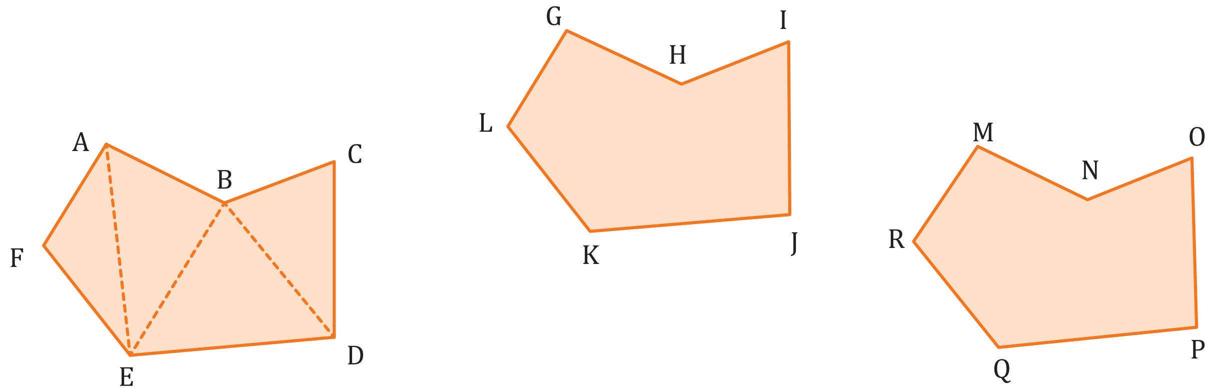




3. Comparen sus respuestas con las de otra pareja. De haber diferencias, argumenten quién tiene la razón.

4. Consideren los siguientes tres polígonos iguales. El primero está dividido en 4 triángulos después de haber trazado las diagonales AE, BE y BD. A esta construcción se le llama **triangulación de un polígono**.

a) Encuentren y dibujen otras triangulaciones para los polígonos GHIJKL y MNOPQR.



b) ¿Cuántas diagonales trazaron en la triangulación de cada polígono? ____________

c) ¿En cuántos triángulos quedó dividido cada polígono? ____________

d) ¿Es posible dividir en sólo tres triángulos cada polígono? Justifiquen su respuesta.

____

e) ¿Existirá un polígono de 6 lados que se pueda triangular en sólo 3 triángulos? Justifiquen su respuesta. ____________

____

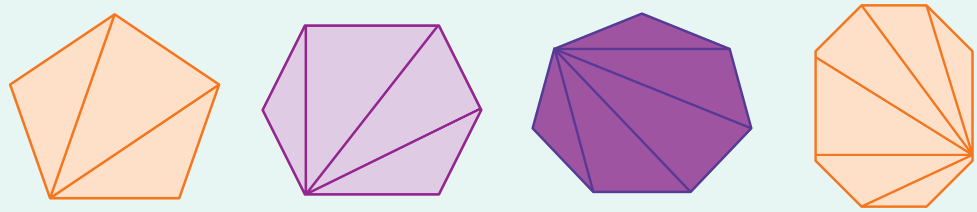
5. Utilicen un geoplano o una hoja cuadriculada para construir varios polígonos y completen la tabla. Consideren sus diagonales a partir de un solo vértice.

Número de lados	Nombre del polígono	Número de diagonales que forman cada triangulación	Número de triángulos que se forman
4	Cuadrilátero		
5			
6	Hexágono	3	4
7			
8			
		6	
20			
			30
n			

Para terminar

Triangulación de polígonos convexos

1. Reúnete con un compañero para analizar qué pasa con la triangulación en el caso de los polígonos convexos. Observen la siguiente secuencia de polígonos y sus triangulaciones para completar la tabla; después, contesten las preguntas.



Polígono				
Número de vértices				
Número de diagonales				
Número de triángulos				

a) Describan qué tienen en común esas triangulaciones. ______________________

____

b) Entre un polígono y otro, ¿cuántos vértices más hay? ______________

c) ¿Cuántas diagonales más? ______________

d) ¿Y cuántos triángulos más se trazan? __________

e) De continuar con la secuencia de este tipo de polígonos, ¿será posible continuar triangulándolos? __________ ¿Por qué? ______________________

f) ¿Cuántas diagonales desde un mismo vértice se necesitan para triangular un polígono convexo? __________

Prueben con polígonos convexos de 9, 10, 12 y más lados. Pueden usar hojas cuadriculadas o el geoplano para trazarlos.

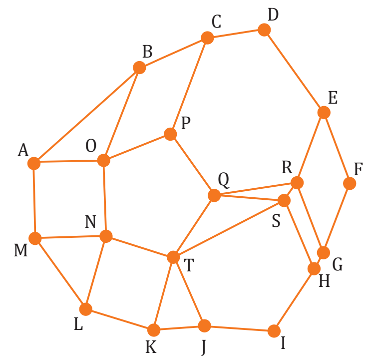
2. Busquen y anoten en su cuaderno una fórmula para contar el número total de diagonales que se pueden dibujar en un polígono convexo. Empiecen con casos pequeños y hagan una tabla para organizar sus descubrimientos.

3. Anoten una palomita (✓) en verdadero o falso según consideren las siguientes afirmaciones.

Afirmación	V	F
a) Si una diagonal une dos vértices no consecutivos de un polígono, entonces para calcular cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice, hay que restar 3 al número de vértices.		
b) Se restan 2 porque uno es el vértice desde donde se trazan las diagonales y el otro es el consecutivo.		
c) Se restan 3 porque uno es el vértice desde donde se trazan las diagonales y los otros dos son vértices consecutivos.		
d) Si por cada vértice se puede trazar una diagonal, entonces hay igual número de diagonales que vértices del polígono.		

4. Intercambien sus respuestas con las de otra pareja. Si hay diferencias, analicen por qué y corrijan lo que sea necesario.

5. Consideren la red de polígonos para completar la tabla de clasificación subrayando la opción que corresponda.



Clasificación \ Polígono	QRGHS	CDERQP	OPQTN	REFG	QSHIJT
Por la medida de los lados o ángulos	regular/ irregular	regular/ irregular	regular/ irregular	regular/ irregular	regular/ irregular
Por sus diagonales (la unión de sus vértices no consecutivos)	convexo/ no convexo	convexo/ no convexo	convexo/ no convexo	convexo/ no convexo	convexo/ no convexo

6. Decidan si es posible construir un polígono que corresponda a cada descripción. En caso afirmativo, dibújenlo en su cuaderno.

a) Un pentágono con ángulos diferentes.

b) Un cuadrilátero no convexo.

c) Un polígono no convexo de cinco lados.

d) Un pentágono no regular con lados iguales.

7. En grupo, lean y comenten la siguiente información.

Una manera de triangular polígonos convexos es trazando todas sus diagonales desde un mismo vértice. Asimismo, todo polígono convexo de n lados se puede triangular en $n - 4$ triángulos con $n - 3$ diagonales.

8. Utilicen el recurso informático *Diagonales y triangulación* para poner en práctica estos conocimientos.

9. Conversión de medidas 1

Sesión 1

Para empezar

¿Te has fijado que cuando llueve algunas veces se producen relámpagos? ¿Y te has preguntado por qué vemos primero la luz del rayo y después escuchamos su sonido (trueno)? Esto se debe a la distinta velocidad en que viajan la luz y el sonido. Mientras que la luz tiene una velocidad, en números redondos, de 300 000 km/s, el sonido recorre aproximadamente 340 m/s. ¿Cuál es la diferencia entre ambas velocidades? ¿Cuántos metros recorre la luz en un segundo? ¿Cuántos kilómetros recorre el sonido en un segundo? Para contestar las preguntas anteriores, es necesario hacer conversiones entre múltiplos de la unidad básica de longitud del Sistema Internacional de Unidades (SI), el metro. En esta secuencia estudiarás cómo hacer conversiones entre múltiplos y submúltiplos del metro, así como conversiones entre unidades de longitud del SI y del Sistema Inglés.

Manos a la obra

Rápidos y lentos

Dato interesante

La palabra *metro* viene del griego *métron*, que significa "medida". En el SI el símbolo del metro es **m**. Actualmente, su definición se basa en la velocidad de la luz: es la distancia recorrida por la luz en el vacío, en un tiempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ segundos. El segundo es la unidad básica de tiempo del SI y equivale a la sesentava parte de un minuto.

1. Trabaja individualmente. Marca con una palomita (✓) la unidad que consideres más conveniente para medir las siguientes distancias y longitudes. Justifica cada elección.

a) El recorrido que hace un autobús para ir de una ciudad a otra:

☐ milímetros ☐ centímetros ☐ decímetros ☐ kilómetros

____

b) La distancia que existe entre dos casas de una misma calle:

☐ centímetros ☐ hectómetros ☐ metros ☐ kilómetros

____

c) La longitud de una lombriz:

☐ milímetros ☐ centímetros ☐ decímetros ☐ kilómetros

____

d) La distancia de nuestro planeta al Sol:

☐ metros ☐ centímetros ☐ hectómetros ☐ kilómetros

____

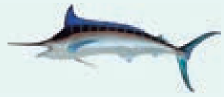
e) La longitud de una cuerda para lazar ganado:

☐ milímetros ☐ hectómetros ☐ metros ☐ kilómetros

____

2. Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Si hay diferencias, analícenlas y establezcan acuerdos.

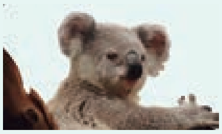
3. Trabajen en pareja. A continuación se presenta una tabla con la distancia que algunos seres vivos podrían recorrer en una hora. Anoten los datos que faltan.

Ser vivo		 Guepardo	 Halcón peregrino	 Avestruz	 Pez espada
Distancia recorrida en una hora	km		300		
	m	120 000		65 000	100 000
Ser vivo		 Liebre	 Tintorera	 Caballo	 Ser humano (Usain Bolt)
Distancia recorrida en una hora	km	75		50	37.58
	m		7 000		

a) ¿Cuál es el ser vivo más veloz? Justifiquen su respuesta. ______________________________

____

4. Completen la siguiente tabla.

Ser vivo		 Caracol	 Perezoso	 Koala	 Manatí
Distancia recorrida en un segundo	cm	1.3		447	150
	m		0.03		
Ser vivo		 Monstruo de Gila	 Estrella de mar	 Loris lento pigmeo	 Tortuga gigante
Distancia recorrida en un segundo	cm	667	2.7		
	m			0.555	0.76

a) ¿Cuál de estos animales es el más lento? Justifiquen su respuesta. ______________________________

____

El metro es la unidad básica de longitud en el Sistema Internacional de Unidades (SI). De éste se obtienen unidades que pueden ser múltiplos o submúltiplos.

Múltiplos ←			BASE ↓	Submúltiplos →		
kilómetro	hectómetro	decámetro	METRO	decímetro	centímetro	milímetro
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1 000 m	100 m	10 m	1 m	0.1 m	0.01 m	0.001 m

Mayores que el metro — Menores que el metro

5. Comparen sus respuestas. Con ayuda de su maestro, lean y analicen la siguiente información. Al terminar, revisen si realizaron correctamente el ejercicio anterior utilizando la equivalencia adecuada.

6. Respondan las siguientes preguntas con base en la información anterior.

a) ¿Cuál es el animal más lento? Justifiquen su respuesta. ______________________

____

b) Un koala se desplazó durante 10 segundos para llegar a la punta de un árbol, ¿cuál es la altura del árbol en metros? ______________________

c) El caballo de Isidro tardó 1 hora y 6 minutos en ir de Teloloapan a Iguala, ¿cuántos hectómetros recorrió aproximadamente? ______________________

d) ¿Cuántos decímetros puede recorrer una tortuga gigante en una hora? __________

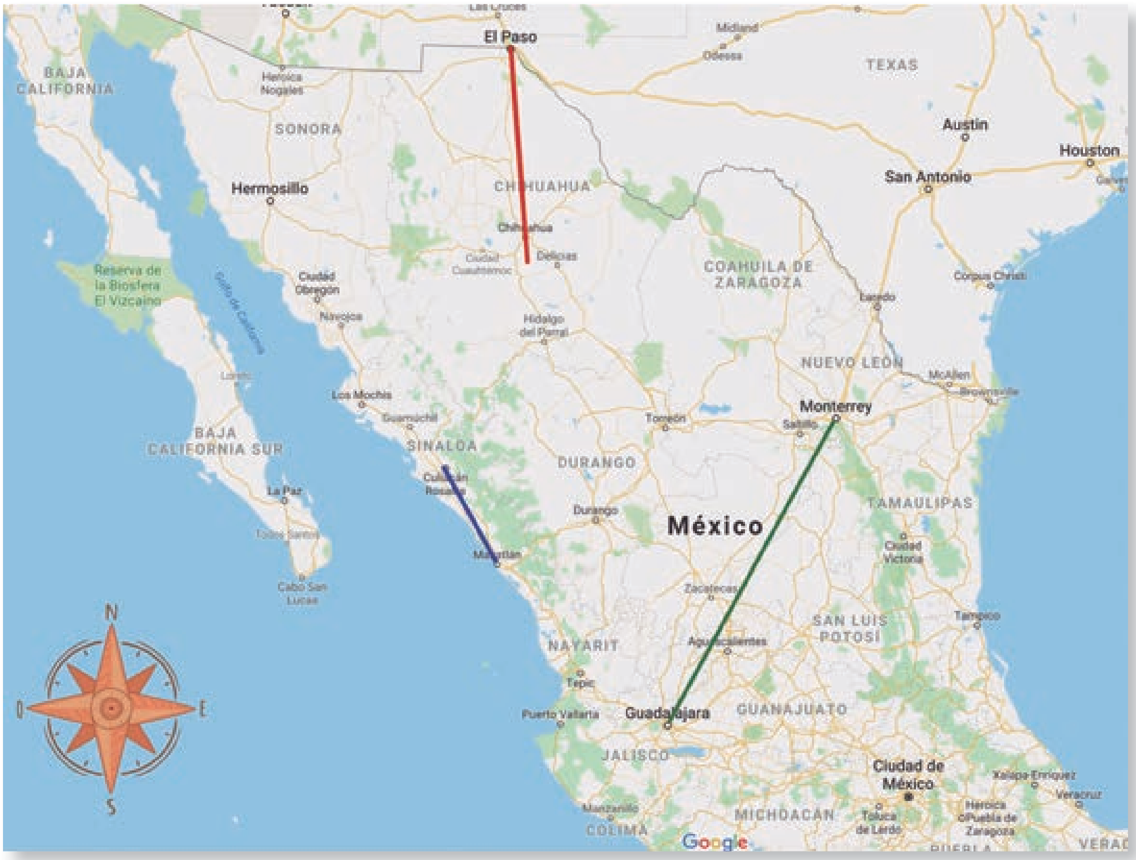
e) Si un halcón peregrino vuela durante 30 minutos, ¿cuántos decámetros recorrerá? ______________________

7. Comparen sus respuestas con las de sus compañeros; en caso de que haya diferencias, revisen a qué se debieron y corrijan.

8. Busquen en la biblioteca un libro que contenga la fábula "La liebre y la tortuga" donde se hace referencia a la velocidad de cada uno de estos animales.

Cimas y simas de México

1. Resuelvan en pareja las siguientes actividades. Consideren que, en el siguiente mapa, un centímetro de los segmentos de recta equivale a 125 000 metros en la realidad.



a) El segmento rojo señala la distancia, en línea recta, que recorre un avión para ir de la ciudad de Chihuahua a El Paso.

¿Qué distancia recorre el avión en metros? ____________

¿A cuántos kilómetros equivale? ____________

b) El segmento morado indica la distancia, en línea recta, que hay entre Mazatlán y Culiacán.

¿Cuál es la distancia real, en línea recta, entre estas dos ciudades? ____________

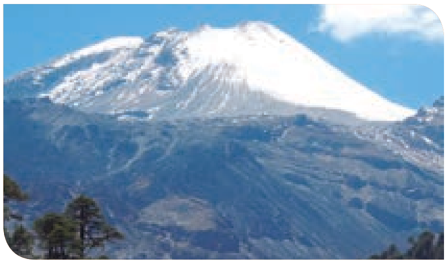
Expresen esta distancia en hectómetros: ____________________________________

c) El segmento verde marca la distancia que hay entre Guadalajara y Monterrey.

¿Cuál es la distancia real entre las dos ciudades? ____________________________

Expresen la distancia en decámetros: ______________________________________

2. Resuelvan los siguientes problemas.

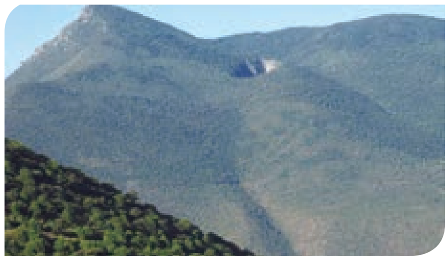


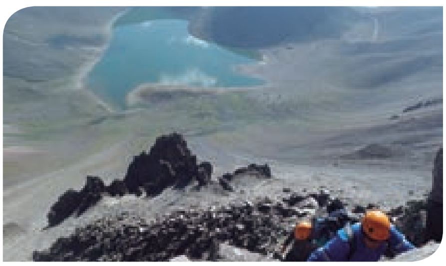
a) El Pico de Orizaba es la montaña más alta de México. Se ubica en el estado de Veracruz y mide 5 610 metros sobre el nivel del mar (msnm). ¿A cuántos kilómetros equivale? ________________

b) La Sima de las Cotorras, en Chiapas, tiene una profundidad de 1 400 dm. Argelia quiso descender para observar las pinturas rupestres que hay en el interior; sólo ha bajado 100 m. ¿Cuántos decámetros le faltan para llegar al fondo? ________________

c) En el Sótano de las Golondrinas, en San Luis Potosí, Carolina descendió 135 m, pero se puede bajar hasta 5 120 dm. ¿Cuántos metros le faltan por descender? ________________

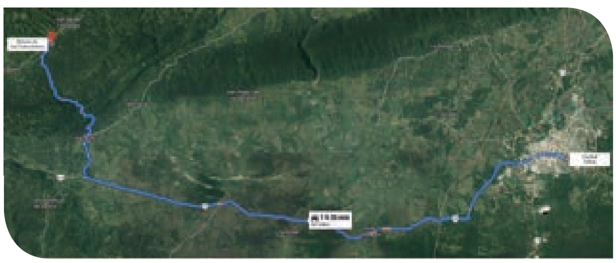
d) El Sótano del Barro, en Querétaro, es la segunda sima más grande del mundo y tiene una profundidad de 450 m. ¿Cuál es su equivalente en kilómetros? ________________





e) Rodrigo y sus amigos fueron a escalar el Nevado de Toluca. De las dos millas que les faltan para llegar a la cima, avanzaron 453 m e hicieron un descanso; después subieron 560 m más y tuvieron que hacer otra parada. ¿Cuántas yardas les faltan por subir para llegar a la cima? ________________

f) De Ciudad Valles, San Luis Potosí, al Sótano de las Golondrinas son aproximadamente 66.9 km. Mario lleva 3 380 m recorridos. ¿Cuántas millas le faltan para llegar? ________________



3. Comparen sus respuestas y comenten la manera en que las obtuvieron.

4. Como parte de una campaña para atraer turismo internacional, principalmente de los países anglosajones, se requiere convertir las siguientes distancias de kilómetros a millas o viceversa. Consideren que 1 km equivale a 0.6214 millas.

Ciudades	Distancia en carretera	
	km	mi
Cd. de México-Acapulco	379.3	
Puerto de Veracruz-Puebla		183
Mérida-Cancún		179
Tuxtla Gutiérrez-Palenque	271	

5. Comparen sus respuestas con el resto del grupo y comenten sus estrategias de cálculo, qué tipo de operaciones los ayudaron a convertir de kilómetros a millas y viceversa.

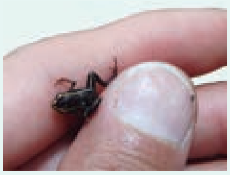
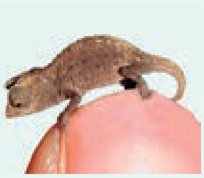
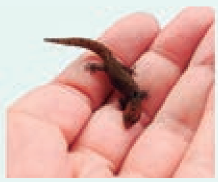
6. Observen el recurso audiovisual *La longitud en el Sistema Inglés* para que conozcan otro sistema de medición distinto al Sistema Internacional y la relación entre sus unidades.

Para terminar

Sesión 3

Unidades grandes y pequeñas

1. Trabajen en pareja las siguientes actividades. Consideren la información de la tabla.

Rana monte Iberia Eleuth (9.2 mm)	Camaleón Brookesia mínima de Madagascar (2.4 cm)	Murciélago abejorro (2.9 cm)	Jaragua sphaero (16.5 mm)	Colibrí abeja (5.08 cm)
				

a) La rana monte Iberia Eleuth, ¿es mayor o menor que un centímetro? ____________
¿A cuántos centímetros equivale su tamaño? ____________

b) ¿Cuál es la medida en milímetros del camaleón? ____________

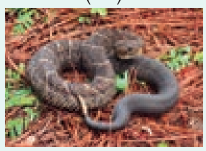
c) ¿De cuánto es la diferencia en centímetros entre el tamaño del murciélago y la rana? ____________

d) ¿Cuánto mide el colibrí abeja en milímetros? ____________

e) ¿Qué diferencia hay entre la medida del murciélago y la de la jaragua? Den su respuesta en decímetros. ___________

f) ¿Cuál es la diferencia entre el tamaño de la jaragua y el camaleón? Den su respuesta en centímetros. ___________

2. En el herpetario de un zoológico necesitan anotar las medidas de las siguientes especies en metros y centímetros, así como su equivalente en pies, pulgadas y yardas, pues se llevará a cabo una exposición internacional. Completen la tabla y al final coloquen en los paréntesis los números del 1 al 5, ordenando los animales de menor a mayor tamaño.

Animal		Boa constrictor ( ) 	Caimán ( ) 	Iguana ( ) 	Serpiente de cascabel ( ) 	Mamba negra ( ) 
Longitud	cm	240		60		
	m		4.87		2.35	
	ft			1.97		9.8
	in		191.73			
	yd	2.62			2.57	

3. En grupo, y con ayuda de su maestro, lean y analicen la siguiente información. Después regresen al cuadro anterior y revisen si la relación entre los datos de las diferentes actividades cumple con la relación que observan en esta tabla.

Hay cuatro unidades para las medidas de longitud en el Sistema Inglés: pulgada, pie, yarda, milla. La tabla muestra la equivalencia entre éstas y también respecto al Sistema Internacional.

Sistema Inglés		Sistema Internacional
Pulgada (in)	0.0833 ft	2.54 cm
Pie (ft)	12 in	30.48 cm
Yarda (yd)	3 ft	91.44 cm
Milla (mi)	1760 yd	1.61 km

Dato interesante

Herpetario proviene de la palabra griega *herpetón*, que significa “reptil”. Es un lugar destinado a la cría y exhibición de cualquier tipo de reptil (incluidos iguanas y caimanes). Cuando sólo hay víboras o serpientes, el lugar se llama *serpentario*.

4. Respondan las siguientes preguntas. En todos los casos, den sus respuestas en millas y kilómetros.

a) Si la luz del Sol tarda 499 segundos en llegar a la Tierra y se sabe que la luz viaja a una velocidad aproximada de 300 000 km por segundo, ¿cuál es la distancia de la Tierra al Sol? ____________________

b) La luz del Sol tarda 360 segundos en llegar a Venus. ¿A qué distancia está este planeta del Sol? ____________________

c) La luz solar tarda 193 segundos en llegar a Mercurio. ¿Cuál es la distancia entre Mercurio y el Sol? ____________________

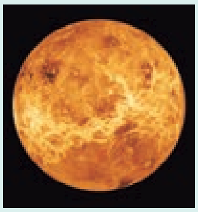
d) ¿Cuál de los tres planetas anteriores está más lejos del Sol? ____________________

____

¿Cuál está más cerca? ____________________

¿De cuánto es la diferencia entre ambas distancias? ____________________

5. Una revista de divulgación científica elaborará una tabla para comparar el diámetro de algunos planetas. Anoten los datos que faltan.

Planeta		 Venus	 Tierra	 Marte	 Saturno	 Júpiter
Diámetro	mi		7 926.21	4 216.63	74 897.6	
	km	12 100				1 430

6. Comparen sus respuestas con las del resto de sus compañeros. Si es necesario, regresen a las tablas de equivalencias para verificar los resultados.

7. Vuelvan a la sesión 1 y respondan las preguntas que se formularon al inicio de ella. Comenten en el grupo sus procedimientos y resultados.

8. Resuelvan problemas que impliquen convertir medidas de longitud mediante el recurso informático *Conversión de medidas de longitud*.

10. Perímetro y área de polígonos regulares

Sesión 1

Para empezar

La base y el techo de algunos quioscos tienen forma de polígonos regulares.

México es un país con muchos quioscos, pues en cada plaza de cada poblado de importancia hay uno. Ahora bien, ¿qué se necesita saber para construir un quiosco? Podemos imaginar que conocer la cantidad de azulejo que se debe comprar para cubrir el piso.

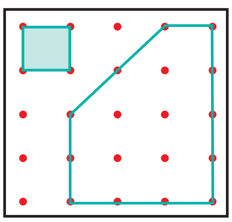
Supongamos que en tu población se construirá un quiosco en forma de hexágono regular y uno de sus lados medirá 5 metros. Si un albañil cobra $150 por cada metro cuadrado que coloca de azulejo, ¿cuánto se le pagará de mano de obra? En esta secuencia, al trabajar las áreas y los perímetros de diversos polígonos, entre ellos los que son regulares, podrás responder la pregunta anterior.

Manos a la obra

Puntos y figuras

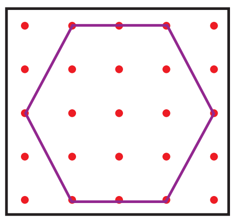
1. Trabajen en parejas las siguientes actividades. Calculen y escriban el área de los siguientes polígonos de acuerdo con la unidad indicada en el polígono 1.

Polígono 1



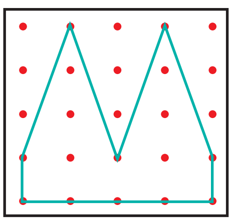
A = ____________

Polígono 2



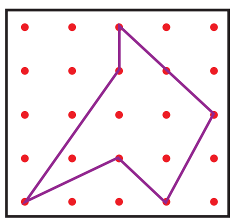
A = ____________

Polígono 3



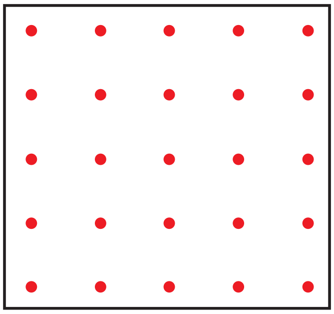
A = ____________

Polígono 4



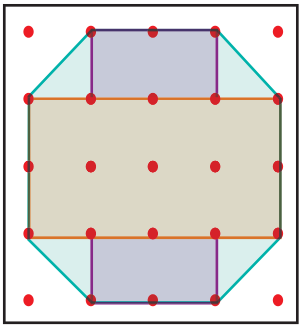
A = ____________

2. Tracen un polígono de 5 lados cuya área sea de 5 unidades cuadradas.



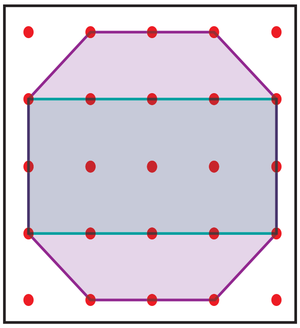
3. Calculen el área de cada una de las partes sombreadas de los siguientes octágonos; anoten el resultado dentro de cada una. Después sumen el área de todas las partes sombreadas de cada octágono y registren el resultado como su área total.

Octágono 1



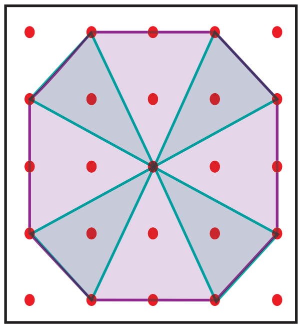
A = ______________

Octágono 2



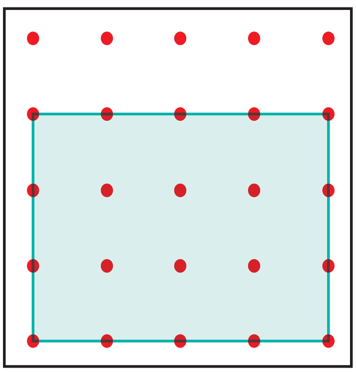
A = ______________

Octágono 3

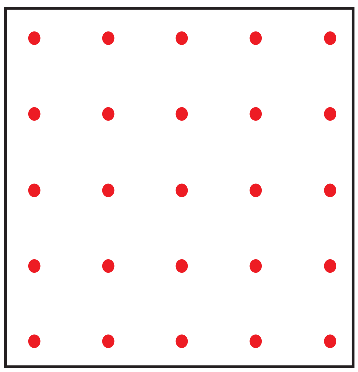


A = ______________

4. Tracen en la figura de la derecha un polígono que tenga *mayor* perímetro, pero *menor* área que el polígono de la izquierda.



A = ______________



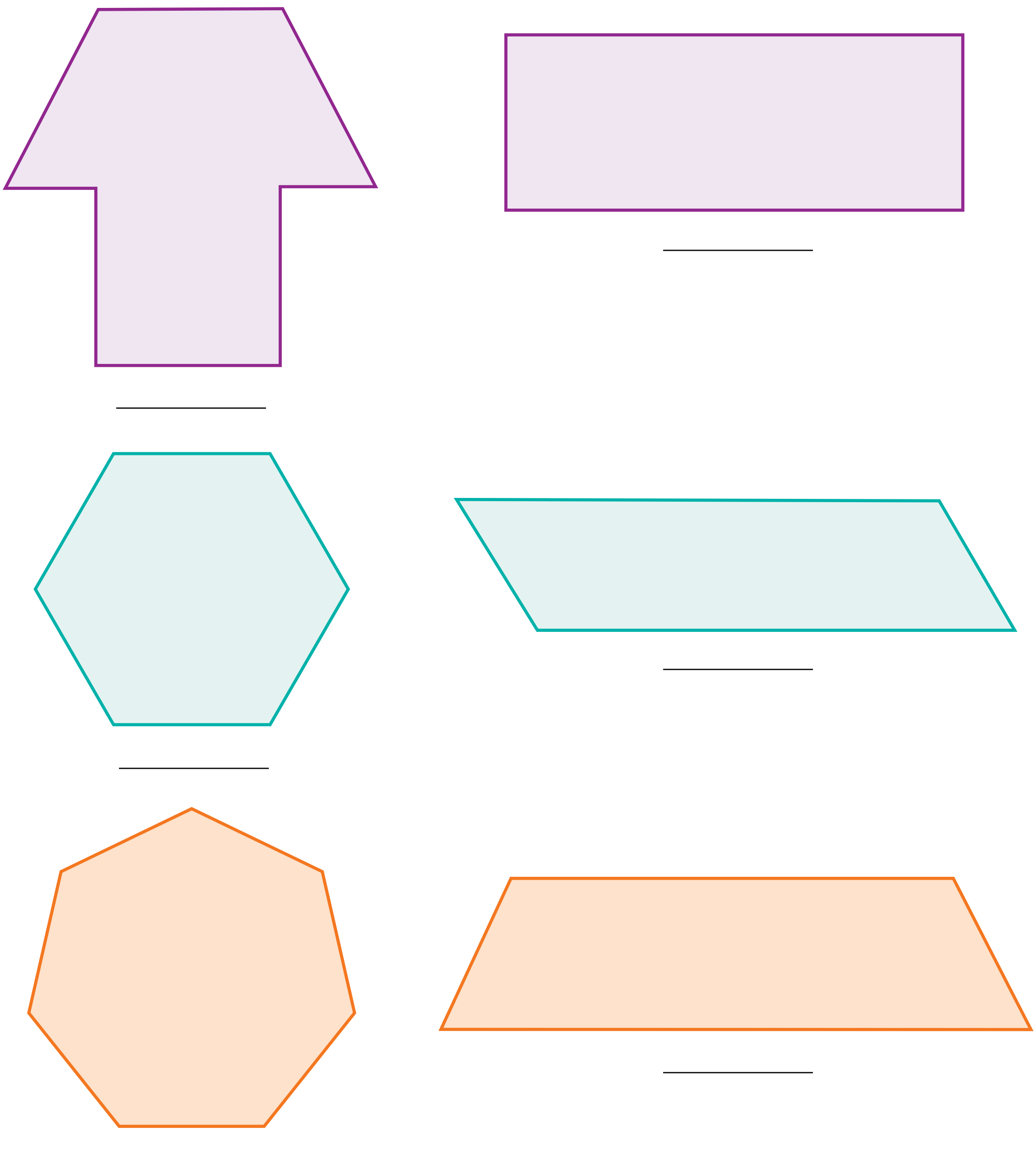
A = ______________

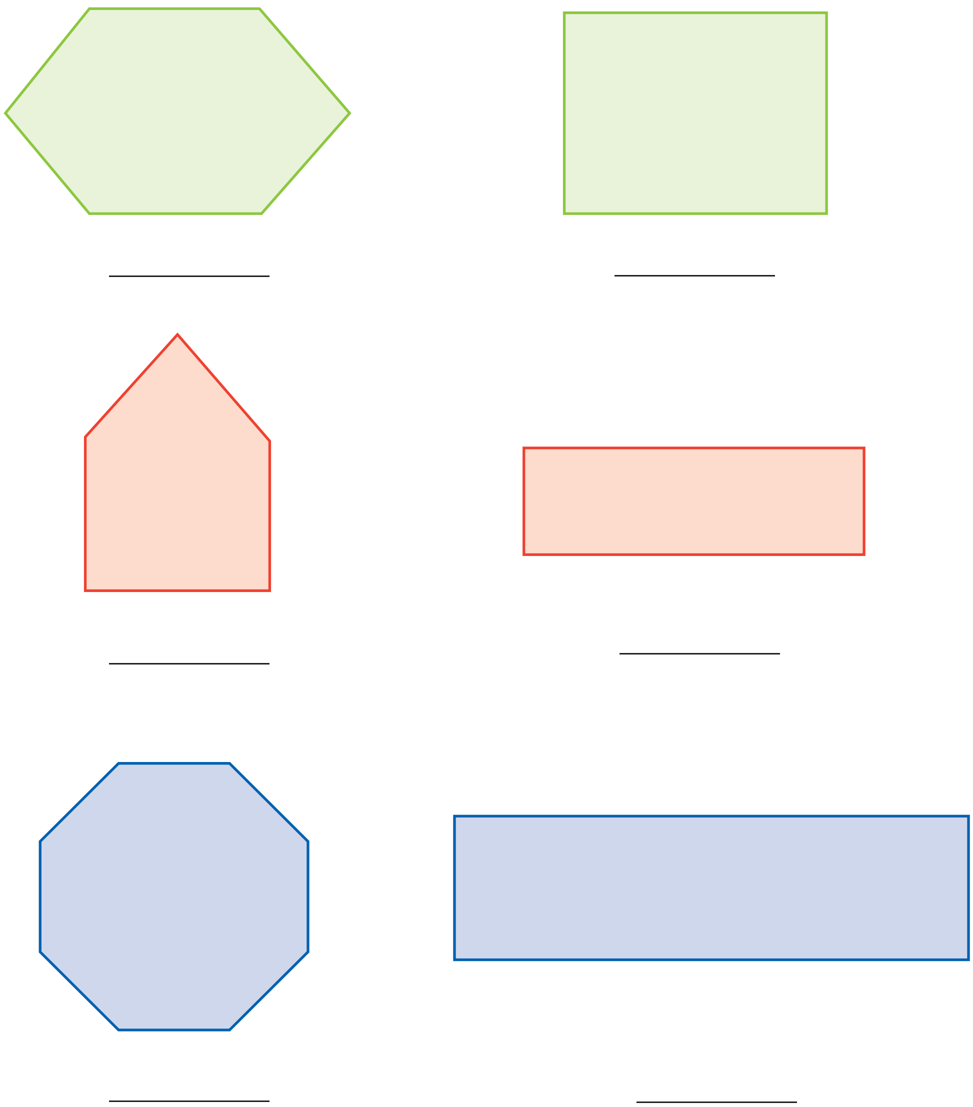
5. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros de grupo. Si hay diferencias, analicen por qué y, si es necesario, corrijan.

Sesión 2

Transformación de figuras

1. Formen un equipo y resuelvan el siguiente problema.
   a) Estimen el área de los polígonos de la izquierda y numérenlos del 1 al 6, asignando el 1 al que tenga menor área y el 6 al de mayor área.
   b) Calquen y recorten cada uno de los seis polígonos. Hagan los cortes que consideren pertinentes y reacomoden las piezas obtenidas de tal manera que obtengan el cuadrilátero de la derecha que tiene el mismo color. Calculen y anoten el área de ese cuadrilátero.





c) ¿De qué color es el cuadrilátero con mayor área? ____________________

d) ¿Cuál tiene menor área? ____________________

2. Comparen sus respuestas con las de otro equipo; en caso necesario, corrijan. Comenten si el polígono y el cuadrilátero del mismo color tienen la misma área y argumenten su respuesta.

3. Muestren la manera en que recortaron los polígonos para formar el cuadrilátero correspondiente.

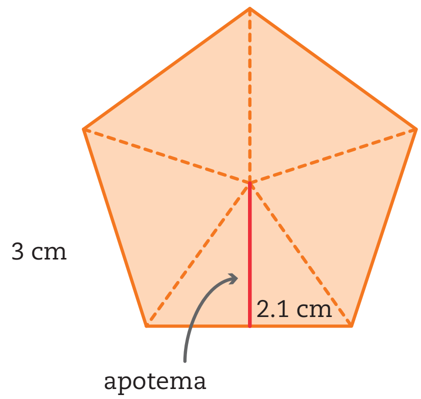
4. Observen el recurso audiovisual *El área de polígonos*, donde encontrarán diversas maneras de calcular el área de un polígono, ya sea irregular o regular.

Hacia la fórmula

1. Trabajen en pareja todas las actividades de esta sesión. Observen el siguiente pentágono regular; el segmento rojo es la altura del triángulo que se forma dentro del pentágono. En los polígonos regulares este segmento recibe el nombre de **apotema**.

Glosario.

Apotema: Proviene del griego y una de sus traducciones es "bajar". En geometría se define como la perpendicular del centro de un polígono regular a cualquiera de sus lados.



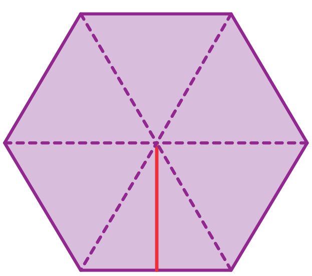
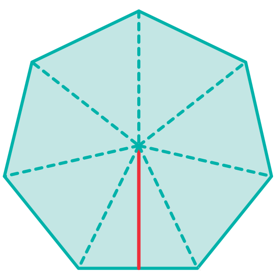
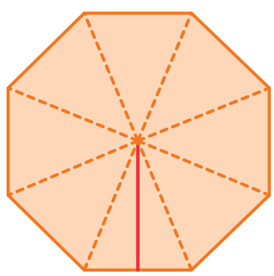
a) ¿Cuánto mide el perímetro del pentágono? ____________________

b) ¿Cuál es el área de cada uno de los triángulos interiores? ____________________

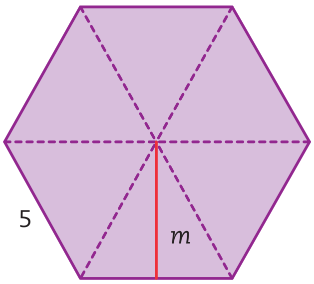
c) ¿Cuál es el área del polígono regular completo? ____________________

d) ¿Cómo la calcularon? ____________________

2. Tomen las medidas que consideren necesarias para calcular el perímetro y el área de cada polígono regular a partir de la división en triángulos:

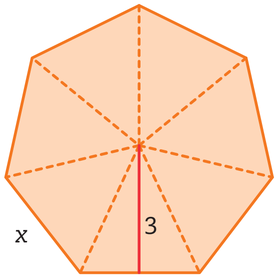
A	B	C
		
P = ______________	P = ______________	P = ______________
A = ______________	A = ______________	A = ______________

3. Calculen el perímetro y el área de cada polígono regular. Los datos numéricos se refieren a una unidad de longitud. Recuerden que las medidas de las áreas son en unidades cuadradas.



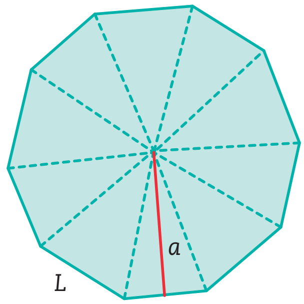
P = ______________

A = ______________



P = ______________

A = ______________



P = ______________

A = ______________

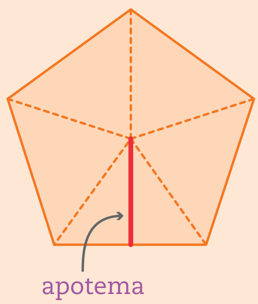
4. Se tiene un polígono regular de n lados, la medida de su lado es L y la medida de la apotema es a.
   a) Escriban una fórmula para calcular el perímetro. P = ________________
   b) Escriban una fórmula para calcular el área. A = ________________

5. Comparen sus resultados con los de sus compañeros; si tienen errores, corrijan. Después, lean y comenten la siguiente información.

El área de un polígono regular puede calcularse multiplicando el perímetro por la apotema y dividiendo el resultado entre dos.

$$A = \frac{\text{Perímetro} \times \text{apotema}}{2}$$

$$A = \frac{Pa}{2}$$



Dato interesante

En las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes, por lo general se utiliza la letra minúscula a para representar la apotema de un polígono regular, así como la letra h para representar su altura.

6. Trabajen el recurso informático *Área de polígonos regulares*, donde encontrarán la aplicación de la fórmula en casos en los que conocen algunos datos y tienen que calcular otros.

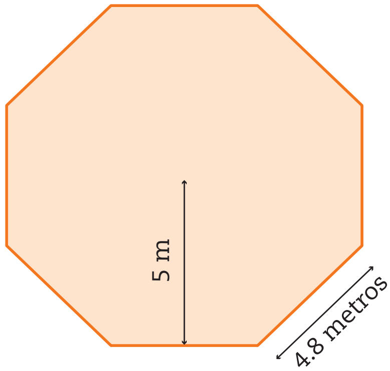
Sesión 4

Para terminar

Problemas con polígonos regulares

1. Trabajen en equipo para resolver los siguientes problemas. En un parque hay un quiosco que tiene forma de octágono regular, cuyas medidas se dan a continuación:

Quiosco de Chignahuapan, Puebla.

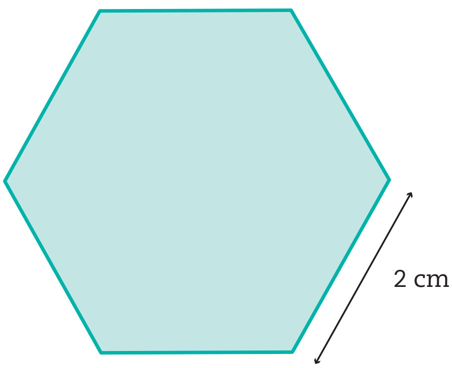


a) Alrededor del quiosco se colocará un barandal metálico. El herrero cobrará $300 por metro de reja, ¿cuánto se le pagará al herrero por la reja? ________________

b) Se desea cubrir el piso con un mosaico que cuesta $200 el metro cuadrado, ¿qué cantidad mínima de mosaico se debe comprar? ________________

c) ¿Cuánto se pagará por el mosaico? ________________

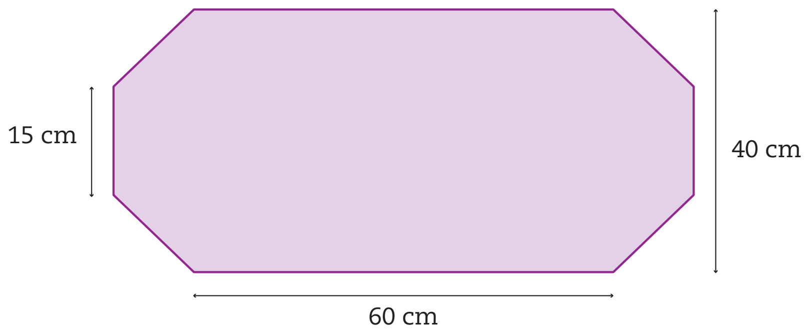
2. En el parque hay 12 secciones de jardín en forma de hexágono. La siguiente figura es una de ellas hecha a escala, por lo que cada centímetro representa un metro. Se cubrirán de pasto en rollo, el cual se vende por metro cuadrado.



a) ¿Qué cantidad de pasto se debe comprar? ________________

3. ¿Cuánto mide la apotema de un decágono regular si cada lado mide 2 cm y su área es de 30.77 cm^2? ________________

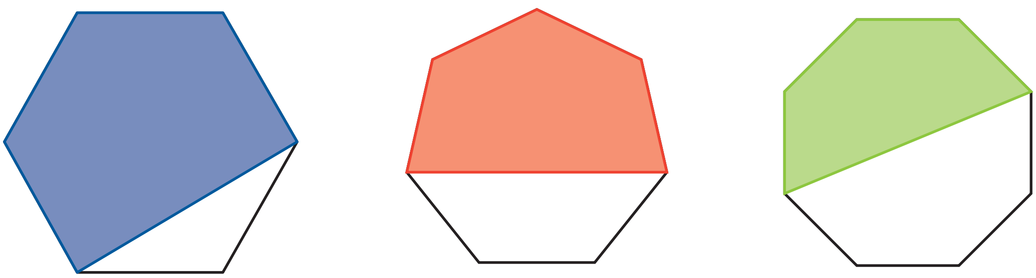
4. Se harán carpetas de la siguiente forma:



a) ¿Qué cantidad de tela se ocupará en cada una? ________________

b) Se pondrá encaje alrededor sin plisar. ¿Qué cantidad de encaje se requerirá para seis carpetas? ________________

5. En cada caso tomen las medidas que consideren necesarias y calculen el área sombreada de los siguientes polígonos.



A = __________ A = __________ A = __________

6. Comparen sus resultados con los de sus compañeros. En aquellos casos en que tomaron medidas es probable que los resultados sean aproximados, comenten a qué se debe.

7. Subrayen las fórmulas con las que se puede calcular el área de un polígono regular. Recuerden que *A* es área, *P* es perímetro, *n* es número de lados, *L* es medida del lado, y *a* es apotema.

$$A = P \times \frac{a}{2} \qquad A = \frac{P \times 2}{a} \qquad A = \frac{nLa}{2} \qquad A = \frac{1}{2} \times Pa \qquad A = 2Pa$$

8. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y argumenten por qué las expresiones que subrayaron son equivalentes.

11. Volumen de prismas

Sesión 1

Para empezar

La imagen muestra dos edificios de oficinas en la Ciudad de México. En ambos, las torres que forman los edificios son prismas.

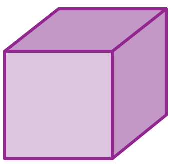
Muchos objetos de la vida cotidiana tienen forma de prismas: edificios, casas, cajas, tinacos, albercas, peceras, etcétera. Para construirlos, se requieren conocimientos geométricos, como trazar el desarrollo plano de un prisma, representarlo en un plano, proyectar la cantidad necesaria de material para levantar una construcción, medir o calcular el volumen que ocupa o, en caso de que sea un recipiente con forma de prisma, determinar cuál es su capacidad. En esta secuencia recordarás cómo calcular el volumen de los prismas, que ya estudiaste en primer grado, y aprenderás a calcular el volumen de prismas que tienen como base un polígono regular.

Manos a la obra

Cajas de cartón

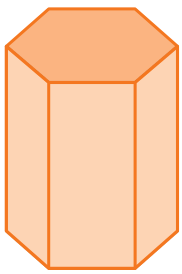
1. Trabajen en pareja. Juan arma cajas de cartón con forma de cuerpos geométricos.

a) En la línea grande, anoten el nombre de cada cuerpo geométrico:



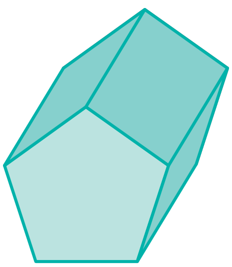
____

____



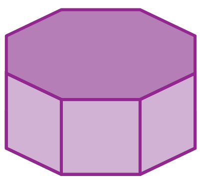
____

____



____

____

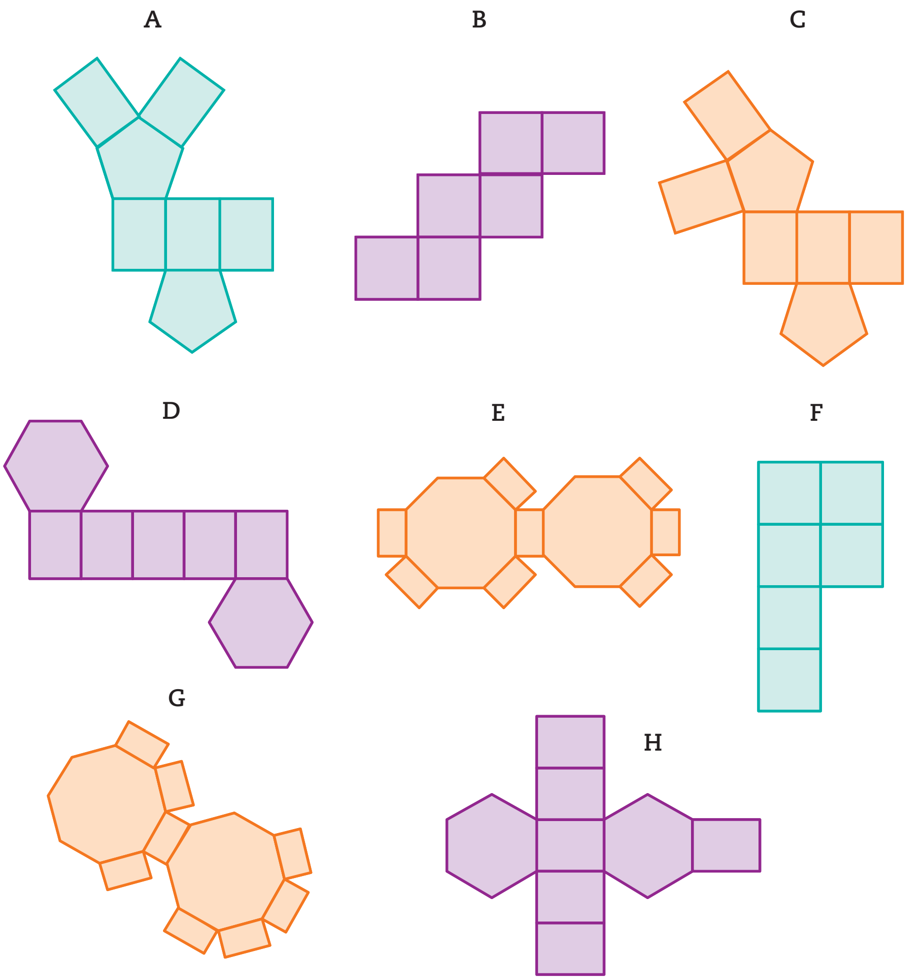


____

____

b) En la línea pequeña al lado de cada caja, anoten la letra del desarrollo plano con el que puede construirse dicho cuerpo geométrico. Consideren los siguientes moldes.

2. Calquen los moldes que eligieron y únicamente tracen las pestañas necesarias para pegarlos.



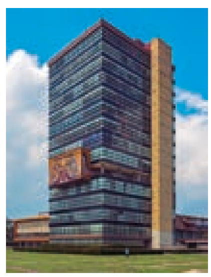
3. Comprueben su respuesta armando las cajas.

4. Comparen sus resultados con los de sus compañeros. Pongan atención en el lugar donde colocaron las pestañas, ¿es necesario que coincida esa ubicación con la que decidieron sus compañeros?, ¿por qué?

____

Dato interesante

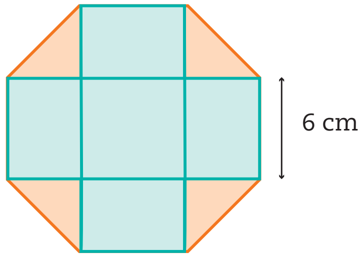
Mario Pani Darqui (1911-1993) fue un arquitecto y urbanista mexicano. Formó parte del equipo que desarrolló el plan maestro para la construcción de Ciudad Universitaria; fue uno de los tres arquitectos que construyó la Torre de Rectoría de la UNAM. Como puedes apreciar, este edificio es un prisma rectangular.



5. Observen el recurso audiovisual *Moldes para cajas*, en el que conocerán más acerca de los desarrollos planos para construir cuerpos geométricos.

Cajas y chocolates

1. Trabajen en pareja. Para sus cajas en forma de prisma regular, Juan diseña diferentes figuras geométricas que usa como base. Por ejemplo, la siguiente:

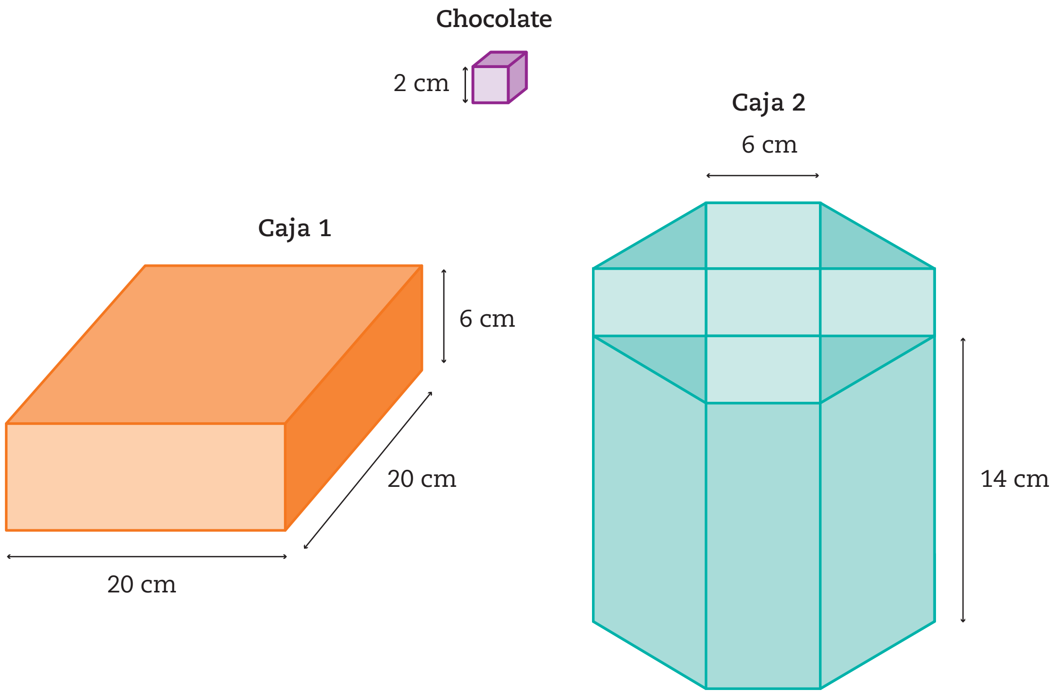


a) ¿De qué figura se trata? ____________

b) Justifiquen su respuesta. ____

____

2. Consideren chocolates en forma de cubo. Las siguientes cajas se van a llenar con esos chocolates sin partirlos. Las bases de la caja octagonal son como las de la figura de la actividad 1.

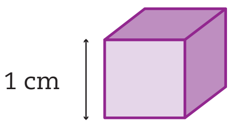
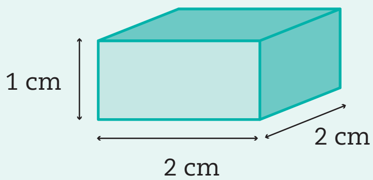
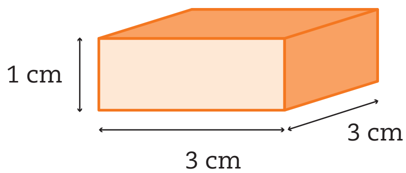
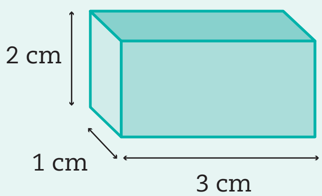
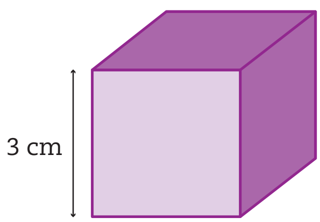


a) ¿A cuál caja le caben más chocolates? ____________

b) ¿Cuántos más le caben? ____________

c) Si se parten algunos chocolates a la mitad, por la diagonal, ¿cuántos chocolates más le caben a la caja en forma de prisma octagonal? ____________

3. Completen la siguiente tabla. Calculen, en dos casos, el número máximo de chocolates que le caben a la caja con forma de prisma octagonal: primero sin hacer cortes, y luego haciendo los cortes necesarios para llenar completamente la caja (los cortes pueden ser de cualquier tipo).

Barra de chocolate	¿Cuántos chocolates le caben sin partir la barra de chocolate?	¿Cuántas barras le caben haciendo cortes?
		
		
		
		
		

4. Compartan con sus compañeros los resultados y el procedimiento para llegar a ellos.

Sesión 3

¿Será la misma fórmula?

1. Trabajen en equipo todas las actividades de esta sesión.

a) En primer grado aprendieron la fórmula para calcular el volumen de un prisma cuya base era un triángulo o un cuadrilátero. Anótenla. ____________

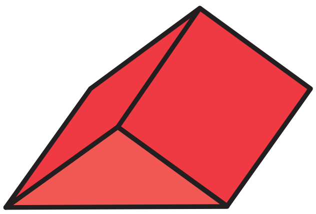
b) Para calcular el volumen de un prisma cuya base sea cualquier polígono, ¿se usará la misma fórmula? ____________

2. Realicen las siguientes actividades para comprobar su respuesta. Utilicen los recortables 1 y 2 que se encuentran al final de su libro.

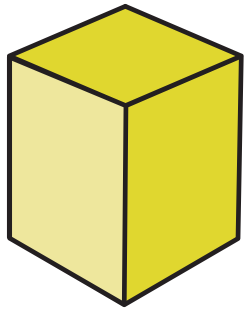
a) Tracen en cada desarrollo plano (molde) las pestañas convenientes para pegarlos.

b) Recorten y armen los prismas.

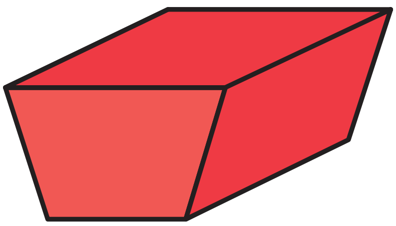
c) Tomen las medidas necesarias y calculen el volumen de cada uno.



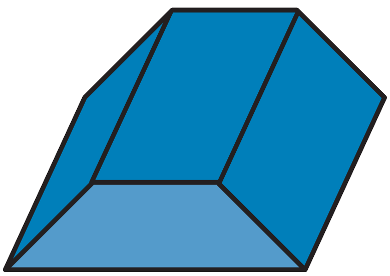
V = __________



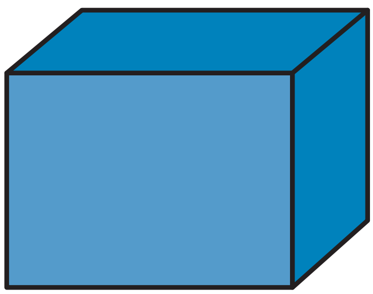
V = __________



V = __________

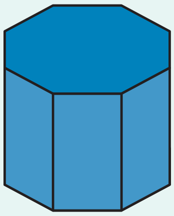
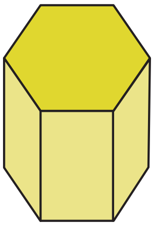
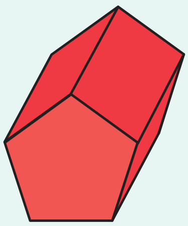


V = __________



V = __________

3. Armen los siguientes prismas a partir de los que construyeron con su material recortable. Después calculen el volumen de acuerdo con las dos formas que se indican:

Prisma	Volumen	
	Procedimiento 1. Sumen el volumen de los prismas que lo forman.	Procedimiento 2. Tomen las medidas necesarias y apliquen la fórmula al prisma cuya base es un polígono regular.
		
		
		

4. Comparen sus resultados con los de sus compañeros. ¿Llegaron al mismo resultado con ambos procedimientos? Es posible que haya diferencias pequeñas. Si no son iguales, analicen por qué y platiquen acerca de la imprecisión al medir. Después, lean y comenten la siguiente información:

El volumen de cualquier prisma se calcula con la siguiente fórmula:
Volumen de un prisma = Área de la base por altura.
Si consideramos A para el área de la base y h para altura, la fórmula es:

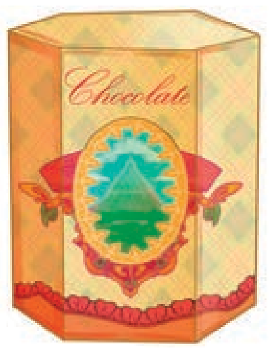
$$V = A \times h$$

5. Observen el recurso audiovisual *Volumen de prismas*, en el que se muestra que el volumen de cualquier prisma se calcula con la fórmula $V = A \times h$

Para terminar

Resolvamos problemas

1. Trabajen en pareja. En todos los casos las bases son polígonos regulares. Calculen el volumen de las siguientes cajas:



Lado = 3 cm
Apotema = 2.59 cm
Altura = 8 cm

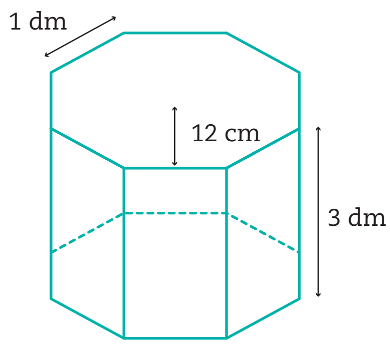
Volumen = __________

Lado = 8 cm
Apotema = 5.5 cm
Altura = 13 cm

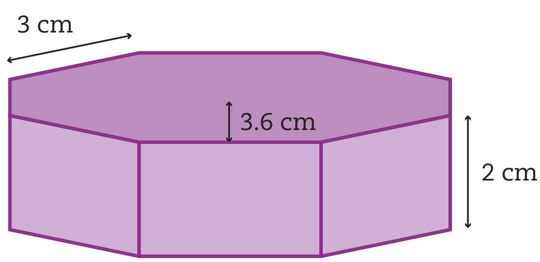
Volumen = __________

2. Se recomienda que por cada pez en una pecera debe haber 4 litros de agua. ¿Cuántos peces como máximo puede tener esta pecera? Recuerden que en un decímetro cúbico cabe un litro de agua; observen que las medidas están en diferentes unidades.

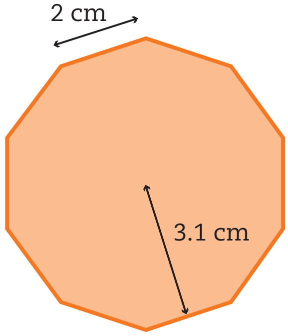
____



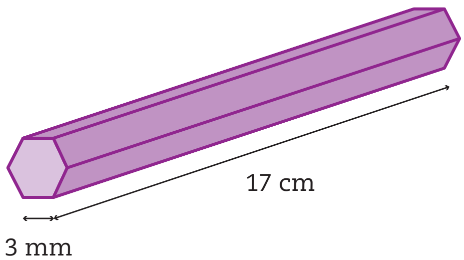
3. Una báscula indica 2 gramos cuando se coloca un centímetro cúbico de cierto tipo de chocolate. ¿Cuánto indicará la báscula cuando se coloque en ella la siguiente barra del mismo tipo de chocolate? ______________



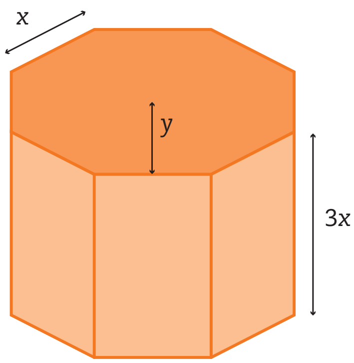
4. Se va a construir un envase en forma de prisma cuya base es un decágono regular. Si las medidas de la base son las que se muestran, ¿cuánto debe medir de altura para que tenga capacidad de un litro? ___________



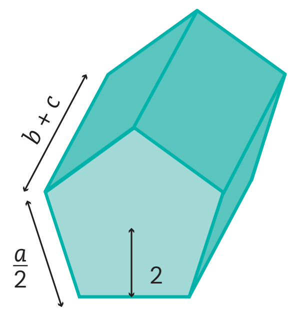
5. ¿Cuánto mide la apotema de este lápiz si antes de sacarle punta medía 17 cm de largo, el lado de su base es de 3 mm y su volumen es de 70.6 cm^3? ___________



6. Escriban la expresión con la que se obtiene el volumen de los siguientes prismas.



V = ___________



V = ___________

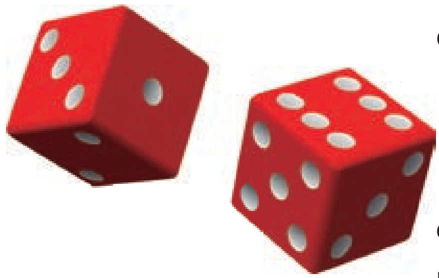
7. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de sus compañeros. Si hay errores, corríjanlos.

8. Practiquen la resolución de problemas que implican el cálculo de volúmenes de prismas en el recurso informático *Prismas y volúmenes* en https://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos-JS-LOMCE/index.htm

12. Probabilidad clásica 1

Sesión 1

Para empezar



Cuando lanzamos simultáneamente dos dados es posible que ocurra, entre otros, uno de los dos resultados siguientes:

Resultado 1: Se obtiene un 3 y un 6.

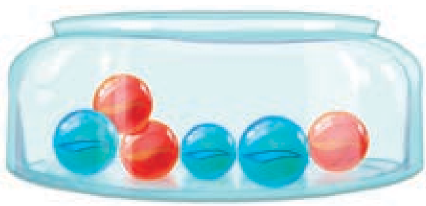
Resultado 2: Se obtiene dos veces el 3.

¿Estos resultados tienen la misma probabilidad de que ocurran, es decir, son equiprobables? ¿De qué manera lo podrías saber? En esta secuencia recordarás cómo calcular la probabilidad frecuencial de un evento, y aprenderás qué es y cómo se calcula la probabilidad clásica de un evento.

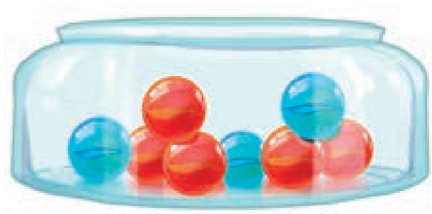
Manos a la obra

Urnas

1. Trabaja individualmente. Para ganar un premio debes sacar, con los ojos cerrados, una canica azul de una urna. ¿De cuál urna prefieres extraer la canica?



Urna A



Urna B

a) En la urna A, ¿cuántas canicas azules hay? ____________
- ¿Cuántas canicas hay en total? ____________
- ¿Cuál es la proporción del número de canicas azules respecto al total de canicas en la urna? ____________

b) En la urna B, ¿cuántas canicas azules hay? ____________
- ¿Cuántas canicas hay en total? ____________
- ¿Cuál es la proporción del número de canicas azules respecto al total de canicas en esa urna? ____________